

Äquivalenz von Bildsprachen synchroner, deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme

Bianca Truthe*

4. Oktober 2005

Zusammenfassung

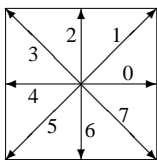
In der vorliegenden Arbeit wird folgendes Äquivalenzproblem untersucht:

Ist es entscheidbar, ob zwei synchrone, deterministische, kontextfreie Ketten-Code-Bild-Systeme die gleichen Bildsprachen erzeugen?

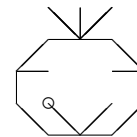
1. Einleitung

Ketten-Code-Bild-Sprachen sind ein grammatikalischer Ansatz zur Beschreibung von Bildern (Strichgraphiken). Sie basieren auf der Erzeugung von Wörtern über einem speziellen Alphabet und der Interpretation dieser Wörter als Bilder. Sie können als eine formale Beschreibung der Arbeitsweise gewisser Plotter aufgefasst werden.

Ketten-Code-Bild-Sprachen wurden von H. FREEMAN eingeführt [Fre61]. Bei Ketten-Codes entsteht ein Bild durch eine Folge von Zeichenbewegungen, die durch Symbole repräsentiert sind. Ein Wort beschreibt ein Bild, das durch Nacheinanderausführung der Zeichenschritte seiner Buchstaben entsteht. FREEMAN benutzt ein achtelementiges Alphabet $\{0, \dots, 7\}$, dessen Elemente entsprechend folgender Skizze interpretiert werden:



Das rechte Bild wird beispielsweise durch das Wort 7012403437261545046701 beschrieben:
(Zum Nachzeichnen beginne man am Kreis.)



Der Zusammenhang von Wörtern und Bildern legt es nahe, Beziehungen zwischen formalen Sprachen und Bildsprachen zu suchen. In den 80er Jahren wurden Ketten-Code-Bild-Sprachen untersucht, bei denen die zugrunde liegenden Wortsprachen zur CHOMSKY-Hierarchie gehören.

*Fakultät für Informatik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg,
e-mail: truthe@iws.cs.uni-magdeburg.de

Bei den biologisch motivierten LINDENMAYER-Systemen wird eine Variante der Ketten-Codes verwendet, die auf der Schildkrötengeometrie basiert. Dabei werden nur die vier Richtungen 0, 2, 4, 6 betrachtet, für die – in Anlehnung an Plotter-Befehle – die Buchstaben r, u, l, d (right, up, left, down) geschrieben werden.

Kontextfreie LINDENMAYER-Systeme werden in folgende Klassen eingeteilt: DOL (deterministisches Ersetzen von Buchstaben), OL (nichtdeterministisches Ersetzen von Buchstaben), $DTOL$ (nichtdeterministisches Auswählen einer Ersetzungstabelle, nach der deterministisch ersetzt wird) und TOL (nichtdeterministisches Auswählen einer Ersetzungstabelle, nach der nichtdeterministisch ersetzt wird).

Erste Ergebnisse zu synchronen TOL -Systemen, den $sTOL$ -Systemen wurden in der Arbeit [DHR92] von J. DASSOW und J. HRONKOVIČ präsentiert. Darauf aufbauend entstand die Dissertation [T05], in der nachgewiesen wurde, dass und wie sich entscheiden läßt, ob ein $sTOL$ -System eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.

In der vorliegenden Arbeit wird das Äquivalenzproblem bei $sDOL$ -Systemen hinsichtlich der erzeugten Bildsprachen untersucht.

2. Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die benötigten Begriffe zusammengestellt. Für eine detailliertere Einführung sei auf [T05] verwiesen.

Die Buchstaben r, u, l und d werden im Folgenden in dieser anderen Schriftart dargestellt, um Verwechslungen mit Variablen zu vermeiden. Die Menge dieser Buchstaben (das Alphabet) wird mit \mathcal{A} bezeichnet:

$$\mathcal{A} = \{ r, u, l, d \}.$$

Die Wörter über diesem Alphabet lassen sich als Abbildungen auf dem \mathbb{Z}^2 ansehen. Dabei ordnet jede der vier Richtungen einem Punkt $q \in \mathbb{Z}^2$ seinen entsprechenden Nachbarn $x(q) = q + v_x$ zu, wobei

$$v_r = (1, 0), \quad v_l = -(1, 0), \quad v_u = (0, 1), \quad v_d = -(0, 1)$$

gilt. Dem Leerwort λ entspricht die identische Abbildung. Ein zusammengesetztes Wort $w \in \mathcal{A}^*$ symbolisiert die verkettete Abbildung $v \circ w$:

$$v \circ w : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } q \mapsto w(v(q)).$$

Eine Abbildung, die zusammen mit einer Abbildung x einen Diagonalnachbarn liefert, wird durch $^\perp$ gekennzeichnet. Die Inversen zweier Abbildungen x und x^\perp werden durch \bar{x} bzw. \bar{x}^\perp symbolisiert. Die nebenstehende Tabelle zeigt die entsprechenden Funktionen.

x	\bar{x}	x^\perp	\bar{x}^\perp
r	l	u	d
l	r	d	u
u	d	r	l
d	u	l	r

Wenn $w = w_1 \cdots w_n$ ein aus Buchstaben w_1, \dots, w_n zusammengesetztes Wort ist, so bezeichne $\overrightarrow{w_i}$ das Teilwort bis zum i -ten Buchstaben: $\overrightarrow{w_i} = w_1 \cdots w_i$. Werden die Buchstaben als Zeichenbefehle aufgefasst, so sind Wörter Befehlsfolgen. Durch Abarbeiten solcher Befehlsfolgen entstehen Bilder. Diese Bilder sind Polygonzüge, bei denen die Ecken Punkte des \mathbb{Z}^2 sind und die Kanten achsenparallel verlaufen. Die Polygonzüge werden durch Gittergraphen beschrieben. Ein Gittergraph ist ein Graph, bei dem die Knotenmenge eine Teilmenge von \mathbb{Z}^2 ist und jede Kante zwei benachbarte Knoten $q, x(q)$ mit $q \in \mathbb{Z}^2$ und $x \in \mathcal{A}$ verbindet. Er enthält außerdem zwei ausgezeichnete Punkte, und zwar einen Anfangs- und einen Endknoten.

Es seien $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2$ ein Punkt (Anfangspunkt) und $w = w_1 \cdots w_n$ ein Wort über dem Alphabet \mathcal{A} . Die Knotenmenge $\odot^{\mathbf{a}}(w)$ zu w bezüglich \mathbf{a} sei die Menge aller „angelaufenen“ Punkte:

$$\odot^{\mathbf{a}}(w) = \{ \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a}) \mid i = 0, \dots, n \}.$$

Der gerichtete Gittergraph $g^{\mathbf{a}}(w)$ beschreibt den „Zeichenablauf“ (Kanten, die mehrfach gezeichnet werden, treten auch mehrfach in der Kantenfolge auf):

$$g^{\mathbf{a}}(w) = \left(\odot^{\mathbf{a}}(w); \mathbf{a}, w(\mathbf{a}); \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a})) \}_{i=1, \dots, n} \right).$$

Abstrahiert man von den Mehrfachkanten, so erhält man den schlichten, gerichteten Gittergraphen $s^{\mathbf{a}}(w)$

$$s^{\mathbf{a}}(w) = (\odot^{\mathbf{a}}(w); \mathbf{a}, w(\mathbf{a}); \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a})) \mid i = 1, \dots, n \}).$$

Jede Kante von $s^{\mathbf{a}}(w)$ hat die Form $(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a}))$. Da $\overrightarrow{w_i}(\mathbf{a}) = w_i(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}))$ gilt und die Abbildungen r, u, l, d bijektiv sind, ist die Kante $(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a}))$ eindeutig durch $(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), w_i)$ beschrieben. Es treten keine isolierten Knoten auf; der Graph ist zusammenhängend. Somit entspricht dem schlichten, gerichteten Gittergraphen $s^{\mathbf{a}}(w)$ umkehrbar eindeutig die Kantenmenge

$$\|\mathbf{a}w = \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), w_i) \mid i = 1, \dots, n \}.$$

Abstrahiert man schließlich von den Kantenrichtungen, entsteht das Bild

$$p^{\mathbf{a}}(w) = (\odot^{\mathbf{a}}(w); \mathbf{a}, w(\mathbf{a}); \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a})), (\overrightarrow{w_i}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a})) \mid i = 0, \dots, n \}).$$

Wenn eine Folge von Zeichenbefehlen abgearbeitet ist, interessiert nur noch das entstandene Bild, aber nicht, wie es entstanden ist. In dem Bild zu einem Wort uvw ist $p^{u(o)}(v)$ ein Teilbild (auch Unterbild genannt).

Da jedes Wort eine endliche Länge hat, liegt das entsprechende Bild in einem beschränkten Rechteck, der Bildfläche

$$\square^{\mathbf{a}}(w) = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \underline{x}^{\mathbf{a}}(w) \leq x \leq \overline{x}^{\mathbf{a}}(w) \text{ und} \\ \underline{y}^{\mathbf{a}}(w) \leq y \leq \overline{y}^{\mathbf{a}}(w) \end{array} \right. \right\},$$

wobei $\underline{x}^a(\mathbf{w})$, $\underline{y}^a(\mathbf{w})$, $\bar{x}^a(\mathbf{w})$ und $\bar{y}^a(\mathbf{w})$ die Randkoordinaten der Knoten aus $\odot^a(\mathbf{w})$ darstellen:

$$\begin{aligned}\underline{x}^a(\mathbf{w}) &= \min \{ x \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}, & \underline{y}^a(\mathbf{w}) &= \min \{ y \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}, \\ \bar{x}^a(\mathbf{w}) &= \max \{ x \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}, & \bar{y}^a(\mathbf{w}) &= \max \{ y \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}.\end{aligned}$$

Wenn nichts anderes angegeben wird, liegt der Anfangspunkt im Nullpunkt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Der obere Index an den Funktionsnamen wird dann weggelassen.

Wenn \mathfrak{P} und \mathfrak{R} Rechtecke sind, dann sei die erweiterte Vereinigung $\mathfrak{P} \uplus \mathfrak{R}$ das kleinste Rechteck, das die Vereinigung $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{R}$ enthält.

Mit \mathbb{A} sei die Menge aller endlichen und nichtleeren Teilmengen von Wörtern über dem Alphabet \mathcal{A} bezeichnet. Das Mengensystem \mathbb{A} bildet mit den Operationen Vereinigung \cup und Konkatenation \cdot einen Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$, da (\mathbb{A}, \cup) und (\mathbb{A}, \cdot) Halbgruppen sind und die bekannten Distributivgesetze gelten.

Es seien κ, μ zwei natürliche Zahlen, $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_0$. Ein Endomorphismus h auf dem Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ heißt (κ, μ) -Endomorphismus, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ folgendes erfüllt ist: Wenn $x' \in h(\{x\})$ ist, so gilt

1. $x'(\mathfrak{o}) = \kappa \mathfrak{v}_x$ und
2. $\square(x') \subseteq \kappa[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \uplus \mu[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}]$.

Das Anwenden von h auf eine Wortmenge W wird Ableiten genannt. Die erste Synchronisationsbedingung gibt an, wo die Bild-Endpunkte der ersten Ableitungen des Alphabets liegen; die zweite Bedingung bewirkt, dass das Bild zu jeder Ableitung von $x \in \mathcal{A}$ in einem gewissen Rechteck liegt. Der Parameter κ gibt eine Längenänderung beim Ableiten an; im Falle $\kappa = 0$ heißt der Endomorphismus längenkontrahierend, im Falle $\kappa = 1$ längenkonstant und im Falle $\kappa > 1$ längenexpandierend. Der Parameter μ ist eine obere Schranke für die Breitenänderung beim Ableiten.

Ein synchrones, deterministisches, kontextfreies Ketten-Code-Bild-System (genannt *sDOL-System*) ist ein Tripel

$$G = (\mathcal{A}, h, \omega)$$

mit dem Alphabet $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$, einem nichtleeren Startwort (Axiom) $\omega \in \mathcal{A}^+$ und einem (κ, μ) -Endomorphismus h , der jede einelementige Menge auf eine einelementige Menge abbildet ($h(\{x\}) = \{x'\}$). Die Mengenzeichen werden dann weggelassen.

Mit h^n sei die n -stellige Verknüpfung von h bezeichnet:

$$h^n(\mathbf{w}) = h(\dots h(\mathbf{w}) \dots).$$

Das Wort $h^n(\mathbf{w})$ heißt n -te Ableitung von \mathbf{w} . Die jeweils erste Ableitung eines Buchstaben heißt atomare Ableitung.

Die von einem *sDOL-System* G erzeugte Bildsprache B_G ist die Menge aller Bilder von Ableitungen des Axioms ω :

$$B_G = \{p(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} = h^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ein *sDOL-System* heißt längenkontrahierend, längenkonstant oder längenexpandierend, wenn sein Endomorphismus diese Eigenschaft hat.

3. Äquivalenz von *sDOL*-Systemen

Es seien $G_1 = (\mathcal{A}, h_1, \omega_1)$ und $G_2 = (\mathcal{A}, h_2, \omega_2)$ zwei *sDOL*-Systeme. Dabei seien h_1 und h_2 ein (κ_1, μ_1) - bzw. ein (κ_2, μ_2) -Endomorphismus; die erzeugten Bildsprachen seien B_1 bzw. B_2 .

Es sei G_1 ein längenkontrahierendes *sDOL*-System. In [T05] wurde gezeigt, dass B_1 höchstens vier Elemente enthält und es entscheidbar ist, ob B_2 endlich ist oder nicht. Wenn die Bildsprache B_2 endlich ist, so enthält sie höchstens vier Bilder und es kann entschieden werden, ob B_1 und B_2 übereinstimmen oder nicht. Ist B_2 unendlich, so stimmen die Bildsprachen B_1 und B_2 nicht überein.

3.1. Satz: *Es ist entscheidbar, ob die von einem längenkontrahierenden und einem beliebigen *sDOL*-System erzeugten Bildsprachen übereinstimmen oder nicht.*

Es sei nun das System G_1 längenkonstant oder -expandierend ($\kappa_1 \geq 1$) und G_2 längenexpandierend ($\kappa_2 > 1$).

Aufgrund der ersten Synchronisationsbedingung liegt zu jedem Bild-Punkt \mathfrak{p} eines Wortes w das κ -fache von \mathfrak{p} in der Knotenmenge der Ableitung von w :

$$\mathfrak{p} \in \odot(w) \implies \kappa \mathfrak{p} \in \odot(w').$$

Folglich gilt

$$\odot(w) \subseteq \frac{1}{\kappa} \odot(w'),$$

wobei $\frac{1}{\kappa} M \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte $\frac{1}{\kappa} \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \in M$ ist. Für die Systeme G_1 und G_2 gelten daher die folgenden Ungleichungen:

$$\odot(\omega_1) \subseteq \frac{1}{\kappa_1} \odot(\omega'_1) \subseteq \frac{1}{\kappa_1^2} \odot(\omega''_1) \subseteq \dots \subseteq \frac{1}{\kappa_1^i} \odot(\omega_1^{(i)}) \subseteq \dots \quad (1)$$

$$\odot(\omega_2) \subseteq \frac{1}{\kappa_2} \odot(\omega'_2) \subseteq \frac{1}{\kappa_2^2} \odot(\omega''_2) \subseteq \dots \subseteq \frac{1}{\kappa_2^i} \odot(\omega_2^{(i)}) \subseteq \dots \quad (2)$$

Die Inklusionen sind jeweils echt, falls das betreffende System längenexpandierend ist.

Des Weiteren gelte $B_1 = B_2$. Insbesondere ist damit auch $p(\omega_1) \in B_2$. Dann gibt es eine Ableitungsstufe i , so dass die Bilder zu ω_1 und der i -ten Ableitung von ω_2 übereinstimmen: $p(\omega_1) = p(\omega_2^{(i)})$. Wegen (1) und (2) gilt für $j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \odot(\omega_2) &\subseteq \dots \subseteq \frac{1}{\kappa_2^i} \odot(\omega_2^{(i)}) \\ &= \frac{1}{\kappa_2^i} \odot(\omega_1) \\ &\subseteq \frac{1}{\kappa_2^i \kappa_1} \odot(\omega'_1) \subseteq \dots \subseteq \frac{1}{\kappa_2^i \kappa_1^j} \odot(\omega_1^{(j)}). \end{aligned}$$

Wenn $\kappa_2 > 1$ gilt, dann sind die ersten Inklusionen echt; bei $\kappa_1 > 1$ die letzten. Da mindestens einer der beiden κ -Werte größer als Eins ist, gilt

$$\odot(\omega_2) \subset \frac{1}{\kappa_1^j \kappa_2^i} \odot(\omega_1^{(j)})$$

für $j \in \mathbb{N}$. Aus der Gleichheit

$$\left| \frac{1}{\kappa_1^j \kappa_2^i} \odot(\omega_1^{(j)}) \right| = \left| \odot(\omega_1^{(j)}) \right|$$

folgt, dass die Knotenmenge $\odot(\omega_2)$ zu ω_2 kleiner als die Knotenmenge $\odot(\omega_1^{(j)})$ zu einer j -ten Ableitung von ω_1 ist, also $|\odot(\omega_2)| < |\odot(\omega_1^{(j)})|$ für $j > 0$ gilt. Damit stimmen auch die entsprechenden Bilder nicht überein: $p(\omega_2) \neq p(\omega_1^{(j)})$ für $j > 0$. Da die Bildsprachen aber übereinstimmen, gilt $p(\omega_2) = p(\omega_1)$.

Es seien

$$F_1 = (p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1n}, \dots) \text{ und}$$

$$F_2 = (p_{20}, p_{21}, \dots, p_{2n}, \dots)$$

die von den *sDOL*-Systemen G_1 bzw. G_2 erzeugten Bildfolgen ohne Wiederholungen. Für $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt dabei zum einen $p_{i0} = p(\omega_i)$ und zum anderen $p_{ij} = p(\omega_i^{(k)})$ mit der kleinsten Zahl k , die die Gleichung $p(\omega_i^{(k)}) \neq p_{il}$ für $l = 0, \dots, j-1$ erfüllt. Falls $\kappa_i > 1$ ist, enthält die Folge F_i alle erzeugten Bilder ($p_{ij} = p(\omega_i^{(j)})$), da jedes Bild mehr Punkte enthält als sein Vorgänger und daher alle Bilder voneinander verschieden sind.

Den obigen Überlegungen zufolge stimmt das Bild p_{10} mit dem Bild p_{20} überein aber nicht das Bild p_{11} . Analog zu oben erhält man, dass das Bild p_{11} auch mit keinem Bild p_{2j} für $j > 1$ übereinstimmt. Folglich gilt $p_{11} = p_{21}$. Durch analoges Weiterführen gelangt man schließlich zu dem Ergebnis, dass die Bilder wie folgt übereinstimmen: $p_{1j} = p_{2j}$ und $p_{1i} \neq p_{2j}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \mathbb{N}_0$, $j \neq i$. Wenn die Bildsprachen übereinstimmen, dann stimmen also auch die Bildfolgen F_1 und F_2 überein. Wenn die Bildfolgen übereinstimmen, dann natürlich auch die Bildsprachen. Insgesamt ergibt sich damit folgendes Ergebnis.

3.2. Lemma: *Die Bildsprachen eines längenkonstanten oder -expandierenden und eines längenexpandierenden sDOL-Systems stimmen genau dann überein, wenn die wiederholungsfreien Bildfolgen übereinstimmen.*

Wenn $\underline{x}^{(i)}$ die kleinste x -Koordinate ist, die bei den Punkten der Bildfläche zur i -ten Ableitung eines Wortes w auftritt, dann gilt mit den Parametern κ und μ wegen der Synchron-

nisationsbedingungen

$$\begin{aligned}
\underline{x}^{(i)} &\geq \kappa \underline{x}^{(i-1)} - \mu \\
&\geq \kappa^2 \underline{x}^{(i-2)} - \kappa \mu - \mu \\
&\geq \kappa^3 \underline{x}^{(i-3)} - \kappa^2 \mu - \kappa \mu - \mu \\
&\vdots \\
&\geq \kappa^i \underline{x} - \mu \sum_{j=0}^{i-1} \kappa^j.
\end{aligned}$$

Analog gilt für die größten x -Koordinaten sowie die kleinsten und größten y -Koordinaten

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(i)} &\leq \kappa^i \bar{x} + \mu \sum_{j=0}^{i-1} \kappa^j, \\
\underline{y}^{(i)} &\geq \kappa^i \underline{y} - \mu \sum_{j=0}^{i-1} \kappa^j, \quad \bar{y}^{(i)} \leq \kappa^i \bar{y} + \mu \sum_{j=0}^{i-1} \kappa^j.
\end{aligned}$$

Es seien κ_1 und κ_2 verschieden. Angenommen, die Bildfolgen F_1 und F_2 stimmen überein. Dann gilt insbesondere $p(\omega_1) = p(\omega_2)$. Außerdem sei $\mathfrak{q} = (q_x, q_y)$ ein vom Nullpunkt verschiedener Punkt des Bildes. Dann gilt $\kappa_j^i \mathfrak{q} \in \odot(h_j^i(\omega_j))$ für $j = 1, 2$ und alle Ableitungsstufen $i \in \mathbb{N}_0$. Damit sind auch folgende Ungleichungen (komponentenweise) erfüllt, wobei sich \underline{x} , \underline{y} , \bar{x} und \bar{y} auf das Startwort ω_1 beziehen:

$$\kappa_1^i(\underline{x}, \underline{y}) - \mu_1 \sum_{j=0}^{i-1} \kappa_1^j(1, 1) \leq \kappa_1^i \mathfrak{q} \leq \kappa_1^i(\bar{x}, \bar{y}) + \mu_1 \sum_{j=0}^{i-1} \kappa_1^j(1, 1).$$

Im Folgenden wird für $\mu_1 \sum_{j=0}^{i-1} \kappa_1^j$ kurz V_i geschrieben. Wenn $\kappa_2 > \kappa_1$ gilt, dann gibt es eine Ableitungsstufe $i \in \mathbb{N}$, so dass

$$\kappa_1^i(\underline{x}, \underline{y}) - V_i(1, 1) \not\leq \kappa_2^i \mathfrak{q} \quad \text{oder} \quad \kappa_2^i \mathfrak{q} \not\leq \kappa_1^i(\bar{x}, \bar{y}) + V_i(1, 1) \tag{3}$$

gilt. Diese Behauptung wird noch präzisiert und anschließend bewiesen. Es sei $\kappa_2 > \kappa_1$.

1. $q_x \geq 0$ und $q_y \geq 0$: Dann gilt $\kappa_2^i q_x \geq \kappa_1^i \bar{x} + V_i$ oder $\kappa_2^i q_y \geq \kappa_1^i \bar{y} + V_i$ für ein $i > 1$.
2. $q_x \leq 0$ und $q_y \geq 0$: Dann gilt $\kappa_2^i q_x \leq \kappa_1^i \underline{x} - V_i$ oder $\kappa_2^i q_y \geq \kappa_1^i \bar{y} + V_i$ für ein $i > 1$.
3. $q_x \leq 0$ und $q_y \leq 0$: Dann gilt $\kappa_2^i q_x \leq \kappa_1^i \underline{x} - V_i$ oder $\kappa_2^i q_y \leq \kappa_1^i \underline{y} - V_i$ für ein $i > 1$.
4. $q_x \geq 0$ und $q_y \leq 0$: Dann gilt $\kappa_2^i q_x \geq \kappa_1^i \bar{x} + V_i$ oder $\kappa_2^i q_y \leq \kappa_1^i \underline{y} - V_i$ für ein $i > 1$.

Es werden die Ungleichungen durch κ_1^i geteilt. Der Quotient $\frac{V_i}{\kappa_1^i}$ sei mit C_i bezeichnet. Falls $\kappa_1 = 1$ ist, gelten $V_i = \mu_1 i$ und $C_i = V_i$. Im Falle $\kappa_1 > 1$ gilt

$$C_i = \frac{1}{\kappa_1^i} \mu_1 \frac{\kappa_1^i - 1}{\kappa_1 - 1} = \frac{\mu_1}{\kappa_1 - 1} \left(1 - \frac{1}{\kappa_1^i} \right).$$

Mit $C = \frac{\mu_1}{\kappa_1 - 1}$ gilt $0 < C_i < C$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Außerdem werden die Ungleichungen durch q_x bzw. q_y geteilt. Mindestens ein Wert von beiden ist verschieden von Null. Setzt man noch $Q = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$, so erhält man

1. $Q^i \geq \frac{\bar{x} + C_i}{q_x}$ oder $Q^i \geq \frac{\bar{y} + C_i}{q_y},$
2. $Q^i \geq \frac{\underline{x} - C_i}{q_x}$ oder $Q^i \geq \frac{\bar{y} + C_i}{q_y},$
3. $Q^i \geq \frac{\underline{x} - C_i}{q_x}$ oder $Q^i \geq \frac{\underline{y} - C_i}{q_y},$
4. $Q^i \geq \frac{\bar{x} + C_i}{q_x}$ oder $Q^i \geq \frac{\underline{y} - C_i}{q_y}.$

Da $Q > 1$ ist, wächst Q^i in jedem Falle schneller als die rechte Seite der jeweiligen Ungleichung. Es gilt also stets eine der Beziehungen aus (3). Somit gibt es eine Ableitungsstufe $i \in \mathbb{N}$, bei der die Knotenmenge $\odot(h_2^i(\omega_2))$ einen Punkt enthält, der nicht in der Bildfläche $\square(h_1^i(\omega_1))$ liegt. Folglich sind die Bilder $p(h_1^i(\omega_1))$ und $p(h_2^i(\omega_2))$ verschieden; also auch die Bildfolgen F_1 und F_2 . Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $F_1 = F_2$. Mit Lemma 3.2 erhält man, dass bei unterschiedlichen κ -Parametern die Bildsprachen verschieden sind.

3.3. Satz: *Zwei längenkonstante oder -expandierende sDOL-Systeme mit unterschiedlichen κ -Parametern erzeugen stets verschiedene Bildsprachen.*

Es seien nun G_1 und G_2 zwei längenexpandierende sDOL-Systeme mit $\kappa_1 = \kappa_2$.

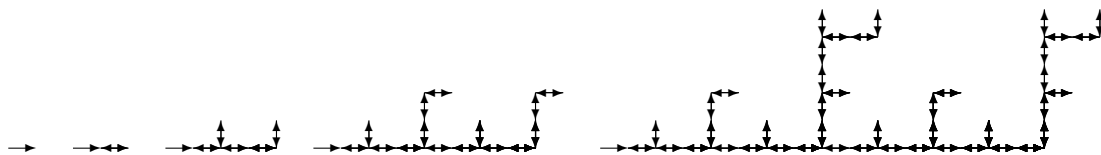
Wenn die beiden Bildsprachen unterschiedlich sind, dann sind auch die Bildfolgen verschieden. Im Folgenden wird nachgewiesen, dass ein Unterschied in diesem Falle spätestens beim vierten Ableiten entsteht.

Das folgende Beispiel zeigt zwei sDOL-Systeme, deren Bildfolgen sich zum ersten Mal bei den vierten Ableitungen unterscheiden.

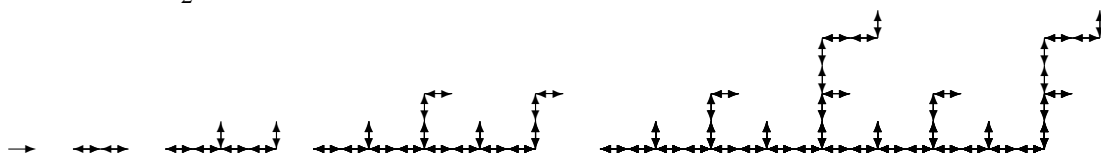
3.4. Beispiel: Es seien $G_1 = (\mathcal{A}, h_1, r)$ und $G_2 = (\mathcal{A}, h_2, r)$ zwei längenexpandierende sDOL-Systeme mit $(2, 1)$ -Endomorphismen h_1 bzw. h_2 vermöge

$$\begin{aligned} h_1(r) &= rrrr, & h_1(\ell) &= udlld, & h_1(u) &= uurl, & h_1(d) &= dd, \\ h_2(r) &= rrrrr, & h_2(\ell) &= udl, & h_2(u) &= uurl, & h_2(d) &= dd. \end{aligned}$$

Die schlichten gerichteten Graphen bis zur vierten Ableitung sind mittels G_1



und mittels G_2



Die Bilder (aber nicht die Kantenmengen) bis zur dritten Ableitungsstufe stimmen jeweils überein; zu den vierten Ableitungen sind auch die Bilder verschieden. ♡

Da bis zur zweiten Ableitungsstufe alle Buchstaben vorliegen, die überhaupt erzeugt werden ([T05, Lemma 1.23]), kommen in der dritten Ableitung des Axioms alle überhaupt auftretenden atomaren Ableitungen als Teilwörter vor. Stimmen die Bilder der vierten Ableitungen auch noch überein, dann sind die neu entstandenen Teilbilder auch Unterbilder des jeweils anderen Bildes. Da sie aber bereits als Unterbilder (an anderer Stelle) in Bildern früherer Ableitungen auftreten und keinen Unterschied hervorgerufen haben, tun sie es jetzt auch nicht und somit auch später nicht.

3.5. Lemma: *Stimmen die Bildfolgen zweier langenexpandierender sDOL-Systeme mit gleichem κ -Parameter bis zur vierten Ableitungsstufe überein, so stimmen sie insgesamt überein.*

Mit Lemma 3.2 ergibt sich folgendes Ergebnis.

3.6. Satz: *Die Bildsprachen zweier langenexpandierender sDOL-Systeme mit gleichem κ -Parameter stimmen genau dann überein, wenn die Bildfolgen bis zur vierten Ableitungsstufe übereinstimmen. Die Äquivalenz solcher sDOL-Systeme ist damit entscheidbar.*

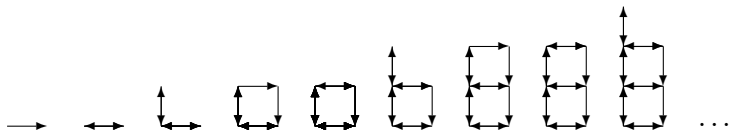
Nun seien G_1 und G_2 zwei längenkonstante sDOL-Systeme.

Das folgende Beispiel zeigt, dass auch bei unterschiedlichen Bildfolgen gleiche Bildsprachen vorliegen können.

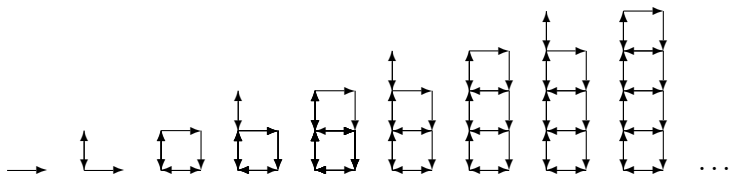
3.7. Beispiel: Es seien $G_1 = (\mathcal{A}, h_1, r)$ und $G_2 = (\mathcal{A}, h_2, r)$ zwei längenkonstante sDOL-Systeme mit

$$\begin{aligned} h_1(r) &= rlr, & h_1(l) &= lud, & h_1(u) &= urdlu, & h_1(d) &= d, \\ h_2(r) &= udr, & h_2(l) &= l, & h_2(u) &= urdlu, & h_2(d) &= d. \end{aligned}$$

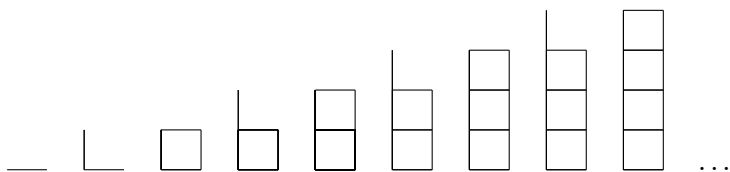
Das $sDOL$ -System G_1 erzeugt folgende schlichte gerichtete Graphen:



Die von G_2 erzeugten schlichten gerichteten Graphen sind:



Es ist zu erkennen, dass beide Bildsprachen aus folgenden Bildern bestehen:



In [T05] wurde gezeigt, dass und wie man entscheiden kann, ob ein längenkonstantes $sDOL$ -System eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht. Wenn die Bildsprache endlich ist, so enthält sie höchstens drei Bilder ([T05]).

3.8. Lemma: *Erzeugen zwei längenkonstante $sDOL$ -Systeme jeweils eine endliche Bildsprache, so ist die Äquivalenz entscheidbar. Es sind höchstens drei Bilder mit drei anderen zu vergleichen.*

Ist eine Bildsprache endlich, die andere aber nicht, so stimmen sie nicht überein.

3.9. Lemma: *Erzeugt ein längenkonstantes $sDOL$ -System eine endliche Bildsprache, ein anderes aber eine unendliche Bildsprache, so sind beide Systeme nicht äquivalent.*

Die Frage, ob und, wenn ja, wie man entscheiden kann, ob zwei längenkonstante $sDOL$ -Systeme mit unendlichen Bildsprachen äquivalent sind oder nicht, wird Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.

4. Zusammenfassung

Es seien $G_1 = (\mathcal{A}, h_1, \omega_1)$ und $G_2 = (\mathcal{A}, h_2, \omega_2)$ zwei $sDOL$ -Systeme mit einem (κ_1, μ_1) - und einem (κ_2, μ_2) -Endomorphismus h_1 bzw. h_2 . Außerdem gelte $\kappa_1 \leq \kappa_2$.

Im vorherigen Abschnitt wurde für folgende Fälle die Entscheidbarkeit der Äquivalenz nachgewiesen:

- $\kappa_1 = 0$ (mindestens ein *sDOL*-System ist längenkontrahierend) — Satz 3.1,
- $\kappa_1 \geq 1$ und $\kappa_2 > \kappa_1$ — Satz 3.3,
- $\kappa_1 > 1$ und $\kappa_2 = \kappa_1$ — Satz 3.6.

Die folgende Tabelle gibt die Nummern der Sätze an, in denen Aussagen über die Entscheidbarkeit oder die Äquivalenz selbst getroffen werden.

κ_2	0	1	> 1
κ_1			
0	3.1	3.1	3.1
1	3.1	?	3.3
> 1	3.1	3.3	3.3, 3.6

Der Fall $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ wird in zukünftigen Arbeiten untersucht werden.

Literatur

- [DHr92] Dassow, J.; Hromkovič, J. On Synchronized Lindenmayer Picture Languages. In: *Lindenmayer Systems*, 253–261. Springer-Verlag, 1992.
- [Fre61] Freeman, H. On the encoding of arbitrary geometric configurations. *IRE Trans. EC*, 10:260–268, 1961.
- [T05] TRUTHE, B.: *Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme*. Dissertation. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Shaker-Verlag Aachen, 2005.