Äquivalenz von Bildsprachen synchroner, deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme

Bianca Truthe
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
FIN/IWS
Postfach 4120
39016 Magdeburg
e-mail: truthe@iws.cs.uni-magdeburg.de

KURZFASSUNG

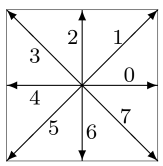
In der vorliegenden Arbeit wird folgendes Äquivalenzproblem untersucht:

Ist es entscheidbar, ob zwei synchrone, deterministische, kontextfreie Ketten-Code-Bild-Systeme die gleichen Bildsprachen erzeugen?

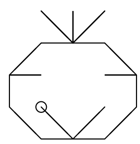
1. Einleitung

Ketten-Code-Bild-Sprachen sind ein grammatikalischer Ansatz zur Beschreibung von Bildern (Strichgraphiken). Sie basieren auf der Erzeugung von Wörtern über einem speziellen Alphabet und der Interpretation dieser Wörter als Bilder. Sie können als eine formale Beschreibung der Arbeitsweise gewisser Plotter aufgefasst werden.

Ketten-Code-Bild-Sprachen wurden von H. Freeman eingeführt [Fre61]. Bei Ketten-Codes entsteht ein Bild durch eine Folge von Zeichenbewegungen, die durch Symbole repräsentiert sind. Ein Wort beschreibt ein Bild, das durch Nacheinanderausführung der Zeichenschritte seiner Buchstaben entsteht. Freeman benutzt ein achtelementiges Alphabet $\{0,\ldots,7\}$, dessen Elemente entsprechend folgender Skizze interpretiert werden:



Das rechte Bild wird beispielsweise durch das Wort 70124034372615450467 01 beschrieben:
(Zum Nachzeichnen beginne man am Kreis.)



In den 80er Jahren wurden Ketten-Code-Bild-Sprachen untersucht, bei denen die zugrunde liegenden Wortsprachen zur Chomsky-Hierarchie gehören. Bei den biologisch motivierten Lindenmayer-Systemen wird eine Variante der Ketten-Codes verwendet, die auf der Schildkrötengeometrie basiert. Dabei werden nur die vier Richtungen 0, 2, 4, 6 betrachtet, für die die Buchstaben r, u, l, d (right, up, left, down) geschrieben werden.

Kontextfreie Lindenmayer-Systeme werden in folgende Klassen eingeteilt: $D0L$ (deterministisches Ersetzen von Buchstaben), $0L$ (nichtdeterministisches Ersetzen von Buchstaben), $DT0L$ (nichtdeterministisches Auswählen einer Ersetzungstabelle, nach der deterministisch ersetzt wird) und $T0L$ (nichtdeterministisches Auswählen einer Ersetzungstabelle, nach der nichtdeterministisch ersetzt wird).

In dieser Arbeit werden spezielle *D0L*-Systeme, die synchronen *D0L*-Systeme (*sD0L*-Systeme) betrachtet.

2. Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die benötigten Begriffe zusammengestellt. Für eine detailliertere Einführung sei auf [T05] (oder auch [T04]) verwiesen.

Die Buchstaben r, u, ℓ und d werden im Folgenden in dieser anderen Schriftart dargestellt, um Verwechslungen mit Variablen zu vermeiden. Die Menge dieser Buchstaben (das Alphabet) wird mit $\mathcal{A}$ bezeichnet: $\mathcal{A} = \{ r, u, \ell, d \}$. Die Wörter über diesem Alphabet lassen sich als Abbildungen auf dem $\mathbb{Z}^2$ ansehen. Dabei ordnet jede der vier Richtungen einem Punkt $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ seinen entsprechenden Nachbarn $x(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} + \mathfrak{v}_{\mathfrak{x}}$ zu, wobei $\mathfrak{v}_r = (1, 0)$, $\mathfrak{v}_\ell = -(1, 0)$, $\mathfrak{v}_u = (0, 1)$ und $\mathfrak{v}_d = -(0, 1)$ gelten. Dem Leerwort λ entspricht die identische Abbildung. Ein zusammengesetztes Wort $\mathsf{vw} \in \mathcal{A}^*$ symbolisiert die verkettete Abbildung $\mathsf{v} \circ \mathsf{w}$:

$$\mathsf{v} \circ \mathsf{w} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } \mathfrak{q} \mapsto \mathsf{w}(\mathsf{v}(\mathfrak{q})).$$

Wenn $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_n$ ein aus Buchstaben $w_1, \ldots, w_n$ zusammengesetztes Wort ist, so bezeichne $\overrightarrow{w_i}$ das Teilwort bis zum i-ten Buchstaben: $\overrightarrow{w_i} = w_1 \cdots w_i$. Werden die Buchstaben als Zeichenbefehle aufgefasst, so sind Wörter Befehlsfolgen. Durch Abarbeiten solcher Befehlsfolgen entstehen Bilder. Diese Bilder sind Polygonzüge, bei denen die Ecken Punkte des $\mathbb{Z}^2$ sind und die Kanten achsenparallel verlaufen. Die Polygonzüge werden durch Gittergraphen beschrieben. Ein Gittergraph ist ein Graph, bei dem die Knotenmenge eine Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$ ist und jede Kante zwei benachbarte Knoten $\mathfrak{q}$, $x(\mathfrak{q})$ mit $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ und $x \in \mathcal{A}$ verbindet. Er enthält außerdem zwei ausgezeichnete Punkte, und zwar einen Anfangs- und einen Endknoten.

Es seien $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2$ ein Punkt (Anfangspunkt) und $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_n$ ein Wort über dem Alphabet $\mathcal{A}$. Die Knotenmenge $\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ zu w bezüglich $\mathfrak{a}$ sei die Menge aller „angelaufenen“ Punkte:

$$\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = \{ \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{i} = 0, \ldots \mathfrak{n} \}.$$

Das Bild zu einem Wort w beginnend in einem Punkt $\mathfrak{a}$ wird durch

$$p^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = (\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}); \mathfrak{a}, \mathsf{w}(\mathfrak{a}); \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})), (\overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a})) \mid \mathfrak{i} = 0, \ldots, \mathfrak{n} \})$$

beschrieben. In dem Bild zu einem Wort uvw ist $p^{\mathsf{u}(\mathfrak{o})}(\mathsf{v})$ ein Teilbild (auch Unterbild genannt).

Da jedes Wort eine endliche Länge hat, liegt das entsprechende Bild in einem beschränkten Rechteck, der Bildfläche $\boxdot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$.

Wenn nichts anderes angegeben wird, liegt der Anfangspunkt im Nullpunkt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Der obere Index an den Funktionsnamen wird dann weggelassen.

Die erweiterte Vereinigung $\mathfrak{P} \Cup \mathfrak{R}$ zweier Rechtecke $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ sei das kleinste Rechteck, das die Vereinigung $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{R}$ enthält. Mit $\mathbb{A}$ sei die Menge aller endlichen und nichtleeren Teilmengen von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{A}$ bezeichnet.

Es seien κ, μ zwei natürliche Zahlen, $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_{\not{o}}$. Ein Endomorphismus h auf dem Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ heißt (κ, μ)-Endomorphismus, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ folgendes erfüllt ist: Wenn $x' \in h(\{ x \})$ ist, so gilt

1. $x'(\mathfrak{o}) = \kappa \mathfrak{v}_{\mathfrak{x}}$ und
2. $\boxdot(x') \subseteq \kappa[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{x}}] \Cup \mu[\mathfrak{v}_{\mathfrak{x}^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{\mathfrak{x}}^\perp}]$.

Das Anwenden von h auf eine Wortmenge W wird Ableiten genannt. Die erste Synchronisationsbedingung gibt an, wo die Bild-Endpunkte der ersten Ableitungen des Alphabets liegen; die zweite Bedingung bewirkt, dass das Bild zu jeder Ableitung von $x \in \mathcal{A}$ in einem gewissen Rechteck liegt. Der Parameter κ gibt eine Längenänderung beim Ableiten an; im Falle $\kappa = 0$ heißt der Endomorphismus längenkontrahierend, im Falle $\kappa = 1$ längenkonstant und im Falle $\kappa > 1$ längenexpandierend. Der Parameter μ ist eine obere Schranke für die Breitenänderung beim Ableiten.

Ein synchrones, deterministisches, kontextfreies Ketten-Code-Bild-System (genannt *sD0L*-System) ist ein Tripel $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ mit dem Alphabet $\mathcal{A} = \{ r, l, u, d \}$, einem nichtleeren Startwort (Axiom) $\omega \in \mathcal{A}^+$ und einem (κ, μ)-Endomorphismus h, der jede einelementige Menge auf eine einelementige Menge abbildet ($h(\{ x \}) = \{ x' \}$). Die Mengenzeichen werden dann weggelassen.

Mit h^n sei die n-stellige Verknüpfung von h bezeichnet. Die jeweils erste Ableitung eines Buchstabens heißt atomare Ableitung. Die von einem *sD0L*-System G erzeugte Bildsprache B_G ist die Menge aller Bilder von Ableitungen des Axioms ω:

$$B_G = \{ p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} = h^n(\omega), n \in \mathbb{N}_{\not{\vdash}} \}.$$

Ein *sD0L*-System heißt längenkontrahierend, längenkonstant oder längenexpandierend, wenn sein Endomorphismus diese Eigenschaft hat.

3. Äquivalenz von *sD0L*-Systemen

Es seien $G_1 = (\mathcal{A}, h_1, \omega_1)$ und $G_2 = (\mathcal{A}, h_2, \omega_2)$ zwei *sD0L*-Systeme. Dabei seien h_1 und h_2 ein (κ_1, μ_1)- bzw. ein (κ_2, μ_2)-Endomorphismus; die erzeugten Bildsprachen seien B_1 bzw. B_2.

In [T05] wurde gezeigt, dass es entscheidbat ist, ob die erzeugte Bildsprache endlich ist oder nicht und dass die Bildsprache eines längenkontrahierenden *sD0L*-Systems höchstens vier Elemente enthält.

Es sei zunächst G_1 längenkontrahierend. Wenn die Bildsprache B_2 endlich ist, so enthält sie höchstens vier Bilder und es kann entschieden werden, ob B_1 und B_2 übereinstimmen oder nicht. Ist B_2 unendlich, so stimmen die Bildsprachen B_1 und B_2 nicht überein.

Es seien nun das System G_1 längenkonstant oder -expandierend ($\kappa_1 \geq 1$) und G_2 längenexpandierend ($\kappa_2 > 1$). Aufgrund der ersten Synchronisationsbedingung liegt zu jedem Bild-Punkt $\mathfrak{p}$ eines Wortes w das κ-fache von $\mathfrak{p}$ in der Knotenmenge der Ableitung von w:

$$\mathfrak{p} \in \odot(\mathsf{w}) \Longrightarrow \kappa\mathfrak{p} \in \odot(\mathsf{w}').$$

Folglich gilt $\odot(\mathsf{w}) \subseteq \frac{1}{\kappa} \odot (\mathsf{w}')$, wobei $\frac{1}{\kappa} M \subseteq \mathbb{R}^{\not{\vDash}}$ die Menge aller Punkte $\frac{1}{\kappa}\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ ist. Für das System G_i $(i = 1, 2)$ gelten daher die folgenden Ungleichungen:

$$\odot(\omega_i) \subseteq \frac{1}{\kappa_i} \odot (\omega_i') \subseteq \frac{1}{\kappa_i^2} \odot (\omega_i'') \subseteq \cdots \subseteq \frac{1}{\kappa_i^n} \odot (\omega_i^{(n)}) \subseteq \cdots \tag{3.1}$$

Die Inklusionen sind jeweils echt, falls das betreffende System längenexpandierend ist.

Des Weiteren gelte $B_1 = B_2$. Insbesondere ist damit auch $p(\omega_1) \in B_2$. Dann gibt es eine Ableitungsstufe i, so dass die Bilder zu ω_1 und der i-ten Ableitung von ω_2 übereinstimmen: $p(\omega_1) = p(\omega_2^{(i)})$. Wegen (3.1) gilt für $j \in \mathbb{N}_{\not{\vdash}}$

$$\odot(\omega_2) \subseteq \cdots \subseteq \frac{1}{\kappa_2^i} \odot (\omega_2^{(i)}) = \frac{1}{\kappa_2^i} \odot (\omega_1) \subseteq \frac{1}{\kappa_2^i \kappa_1} \odot (\omega_1') \subseteq \cdots \subseteq \frac{1}{\kappa_2^i \kappa_1^j} \odot (\omega_1^{(j)}).$$

Wenn $\kappa_2 > 1$ gilt, dann sind die ersten Inklusionen echt; bei $\kappa_1 > 1$ die letzten. Da mindestens einer der beiden κ-Werte größer als Eins ist, gilt

$$\odot(\omega_2) \subset \frac{1}{\kappa_1^j \kappa_2^i} \odot (\omega_1^{(j)})$$

für $j \in \mathbb{N}$. Damit ist die Knotenmenge $\odot(\omega_2)$ zu ω_2 kleiner als die Knotenmenge $\odot(\omega_1^{(j)})$ zu einer j-ten Ableitung von ω_1: $|\odot(\omega_2)| < |\odot(\omega_1^{(j)})|$ für $j > 0$. Damit stimmen auch die entsprechenden Bilder nicht überein: $p(\omega_2) \neq p(\omega_1^{(j)})$ für $j > 0$. Da die Bildsprachen aber übereinstimmen, gilt

$p(\omega_2) = p(\omega_1)$. Das Bild zu ω_2 ist das gleiche wie zu ω_1; es ist jedoch von allen Bildern zu Ableitungen von ω_1 verschieden. Ebenso lässt sich zeigen, dass das Bild von ω_1 mit dem Bild von ω_2 aber keinem anderen Bild aus der Sprache B_2 übereinstimmt.

Auf analoge Weise erhält man, dass die Bilder ableitungsstufenweise übereinstimmen. Wenn die Bildsprachen übereinstimmen, dann stimmen also auch die Bildfolgen

$$F_1 = (p(\omega_1), p(\omega_1'), p(\omega_1''), \ldots), \quad F_2 = (p(\omega_2), p(\omega_2'), p(\omega_2''), \ldots)$$

überein. Wenn die Bildfolgen übereinstimmen, dann natürlich auch die Bildsprachen.

Es gelte $\kappa_1 < \kappa_2$. Dann nimmt die Bildgröße bei G_2 schneller zu als bei G_1. Folglich sind in diesem Falle die Bildsprachen verschieden.

Es seien nun G_1 und G_2 zwei längenexpandierende *sD0L*-Systeme mit $\kappa_1 = \kappa_2$. Wenn die beiden Bildsprachen unterschiedlich sind, dann sind auch die Bildfolgen verschieden. Da bis zur zweiten Ableitungsstufe alle Buchstaben vorliegen, die überhaupt erzeugt werden ([T05, Lemma 1.23]), kommen in der dritten Ableitung des Axioms alle überhaupt auftretenden atomaren Ableitungen als Teilwörter vor. Stimmen die Bilder der vierten Ableitungen auch noch überein, dann sind die neu entstandenen Teilbilder auch Unterbilder des jeweils anderen Bildes. Da sie aber bereits als Unterbilder (an anderer Stelle) in Bildern früherer Ableitungen auftreten und keinen Unterschied hervorgerufen haben, tun sie es jetzt auch nicht und somit auch später nicht.

Folglich stimmen die Bildsprachen zweier längenexpandierender *sD0L*-Systeme mit gleichem κ-Parameter genau dann überein, wenn die Bildfolgen bis zur vierten Ableitungsstufe übereinstimmen.

Nun seien G_1 und G_2 zwei längenkonstante *sD0L*-Systeme. In diesem Falle können auch bei unterschiedlichen Bildfolgen gleiche Bildsprachen vorliegen. In [T05] wurde gezeigt, dass und wie man entscheiden kann, ob ein längenkonstantes *sD0L*-System eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht. Wenn die Bildsprache endlich ist, so enthält sie höchstens drei Bilder ([T05]). Erzeugen zwei längenkonstante *sD0L*-Systeme jeweils eine endliche Bildsprache, so ist die Äquivalenz entscheidbar. Es sind höchstens drei Bilder mit drei anderen zu vergleichen. Ist eine Bildsprache endlich, die andere aber nicht, so stimmen sie nicht überein.

Es bleibt zu untersuchen, ob und, wenn ja, wie man entscheiden kann, ob zwei längenkonstante *sD0L*-Systeme mit unendlichen Bildsprachen äquivalent sind oder nicht.

4. Zusammenfassung

Es seien G_1 und G_2 zwei *sD0L*-Systeme mit den Parametern κ_1 bzw. κ_2. Außerdem gelte $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Im vorherigen Abschnitt wurde für folgende Fälle die Entscheidbarkeit der Äquivalenz nachgewiesen: $\kappa_1 = 0$ und κ_2 beliebig, $\kappa_1 \geq 1$ und $\kappa_2 > \kappa_1$ sowie $\kappa_1 > 1$ und $\kappa_2 = \kappa_1$.

Der Fall $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ist noch zu untersuchen.

Literatur

[Fre61] Freeman, H. On the encoding of arbitrary geometric configurations. *IRE Trans. EC*, 10:260–268, 1961.

[T04] Truthe, B.: Zur Endlichkeit von Bildsprachen zu tabellierten Ketten-Code-Bild-Systemen. In: *14. Theorietag Automaten und Formale Sprachen*, 2:135–139, Institut für Informatik, Universität Potsdam, 2004.

[T05] Truthe, B.: *Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme.* Dissertation. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2005.