Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, tabellierter, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme

Bianca Truthe*

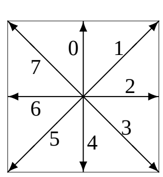
15. April 2004

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, tabellierte, kontextfreie Ketten-Code-Bild-Systeme in Hinsicht auf die Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprachen untersucht. Es wird gezeigt, daß jedes tabellierte Ketten-Code-Bild-System eine endliche oder abzählbare Bildsprache erzeugt und eine Methode angegeben, mit der zu jedem solchen Ketten-Code-Bild-System entschieden werden kann, ob es eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.

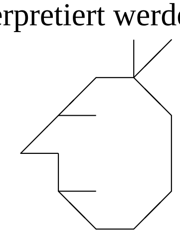
1. Einleitung

Ketten-Code-Bild-Sprachen sind ein grammatikalischer Ansatz zur Beschreibung von Bildern (Strichgraphiken). Sie basieren auf der Erzeugung von Wörtern über einem speziellen Alphabet und der Interpretation dieser Wörter als Bilder. Sie können als eine formale Beschreibung der Arbeitsweise gewisser Plotter aufgefaßt werden.
Ketten-Code-Bild-Sprachen wurden von H. FREEMAN eingeführt ([Fr61]). Bei Ketten-Codes entsteht ein Bild durch eine Folge von Zeichenbewegungen, die durch Symbole repräsentiert sind. Ein Wort beschreibt ein Bild, das durch Nacheinanderausführung der Zeichenschritte seiner Buchstaben entsteht. FREEMAN benutzt ein achtelementiges Alphabet $\{0, \ldots, 7\}$, dessen Elemente entsprechend folgender Skizze interpretiert werden:



Zum Beispiel entsteht das nebenstehende Bild aus dem Wort 1261204153445672606:

(Beim Nachvollziehen beginne man an der Nasenspitze.)



*Fakultät für Informatik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg, e-mail: truthe@isg.cs.uni-magdeburg.de

Für sprachentheoretische Betrachtungen genügen die vier Richtungen $\{0,2,4,6\}$, da die restlichen vier keine andersartigen Resultate liefern und keine anderen Beweismethoden erfordern [DH89]. In Anlehnung an Plotter-Befehle schreibt man r, u, l, d für die Richtungen *right*, *up*, *left*, *down*.
Der Zusammenhang von Wörtern und Bildern legt es nahe, Beziehungen zwischen formalen Sprachen und Bildsprachen zu suchen. Die erste Arbeit auf diesem Gebiet ist von J. FEDER ([Fe68]). In den 80er Jahren wurden Ketten-Code-Bild-Sprachen untersucht, bei denen die zugrunde liegenden Wortsprachen zur CHOMSKY-Hierarchie gehören ([MRW82], [SW85]).
Bei den biologisch motivierten LINDENMAYER-Systemen wird eine Variante der Ketten-Codes verwendet, die auf der Schildkrötengeometrie basiert.
Kontextfreie LINDENMAYER-Systeme werden nach [RS80] in folgende Klassen eingeteilt: $D0L$ (deterministisches Ersetzen von Buchstaben), $0L$ (nichtdeterministisches Ersetzen), $DT0L$ (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der deterministisch ersetzt wird) und $T0L$ (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der nichtdeterministisch ersetzt wird). Zu Ketten-Code-Bild-Sprachen, die auf LINDENMAYER-Systemen basieren, liegen nur wenige Erkenntnisse vor ([DHr92]).
In [T02] wurde eine Abstrahierungshierarchie entwickelt und die Entscheidbarkeit der Endlichkeit von Ketten-Code-Bild-Sprachen zu synchronen, deterministischen, kontextfreien LINDENMAYER-Systemen (*sD0L*-Systemen) auf Grundlage dieser Hierarchie bewiesen. Mittels dieser Abstrahierungshierarchie wurde in nachfolgenden Arbeiten die Entscheidbarkeit der Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, einfach nichtdeterministischer, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme (*s0L*-Systeme) und synchroner, deterministisch-tabellierter, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme (*sDT0L*-Systeme) nachgewiesen ([T03a] und [T03b]). Die vorliegende Arbeit schließt an die vorigen an, indem die Entscheidbarkeit bei Ketten-Code-Bild-Sprachen synchroner, tabellierter, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme untersucht wird.

2. Grundlagen

Die Endlichkeitsuntersuchungen zu Bildsprachen von synchronen, tabellierten, kontextfreien Ketten-Code-Bild-Systemen in der vorliegenden Arbeit beruhen auf der Abstrahierungshierarchie, die in [T02] entwickelt wurde. In diesem Abschnitt werden die benötigten Begriffe zusammengestellt.

2.1. Strukturen über einem Alphabet

Es seien $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$ ein Alphabet und $(\mathcal{A}^*, \cdot)$ die freie Struktur über $\mathcal{A}$ mit der Operation der Aneinanderreihung (Konkatenation). Die Elemente aus $\mathcal{A}^*$ heißen Wörter; λ ist das Leerwort: $\forall \mathsf{w} \in \mathcal{A}^* : \mathsf{w}\lambda = \lambda\mathsf{w} = \mathsf{w}$. Die Menge $\mathcal{A}^+$ enthalte alle Wörter aus $\mathcal{A}^*$ außer dem Leerwort λ. Ein Operationssymbol für die Aneinanderreihung wird im allgemeinen nicht geschrieben. Das Mengensystem der endlichen, nichtleeren Teilmengen von $\mathcal{A}^*$ sei

$\mathbb{A}$. Die Konkatenation zweier Wortmengen $U, V \in \mathbb{A}$ liefert die Menge aller Wörter uv, bei denen u aus der Menge U und v aus V sind:

$$UV = \{\, \mathsf{uv} \mid \mathsf{u} \in U \text{ und } \mathsf{v} \in V \,\}.$$

Das Mengensystem $\mathbb{A}$ bildet mit den Operationen Vereinigung $\cup$ und Konkatenation $\cdot$ einen Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$, da $(\mathbb{A}, \cup)$ und $(\mathbb{A}, \cdot)$ Halbgruppen sind und die bekannten Distributivgesetze gelten.
Auf $\mathcal{A}^*$ wird eine Längenfunktion $|\cdot|$ induktiv erklärt:

1. $|\lambda| = 0$, $|r| = |l| = |u| = |d| = 1$.
2. Sind u, v Wörter, so ist die Länge $|\mathsf{uv}| = |\mathsf{u}| + |\mathsf{v}|$.

Alle Wörter w mit der Länge $|\mathsf{w}| = n$ werden in der Menge $\mathcal{A}^n$ zusammengefaßt. Ein Wort $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^n$ sei aus Buchstaben $w_1, \ldots, w_n$ zusammengesetzt: $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_n$. Mit $\overrightarrow{w_i}$ für $i = 0, \ldots, n$ ist in diesem Zusammenhang das Wort $\overrightarrow{w_i} = w_1 \cdots w_i$ gemeint ($\overrightarrow{w_0} = \lambda$). Zu einem Wort $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ und einem Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ sei $|\mathsf{w}|_x$ die Anzahl der Vorkommen von x in w. Die Menge $[\mathsf{w}]$ sei die Menge der in dem Wort w auftretenden Buchstaben:

$$[\mathsf{w}] = \{\, x \mid |\mathsf{w}|_x \geq 1 \,\}.$$

Analog steht $[W]$ mit einer Wortmenge W für die Menge aller Buchstaben, die in einem Wort aus W auftreten:

$$[W] = \bigcup_{\mathsf{w} \in W} [\mathsf{w}].$$

Mit den Elementen aus $\mathcal{A}^*$ seien Abbildungen auf dem $\mathbb{Z}^2$ assoziiert:

$$\mathsf{w} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad (\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*).$$

Dem Leerwort entspricht die identische Abbildung. Die atomaren Abbildungen r, l, u, d ordnen einem Punkt $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ seine Nachbarn zu:

$$\begin{array}{rclcrcl} r(\mathfrak{q}) & = & \mathfrak{q} + (1,0), & \qquad & l(\mathfrak{q}) & = & \mathfrak{q} - (1,0), \\ u(\mathfrak{q}) & = & \mathfrak{q} + (0,1), & & d(\mathfrak{q}) & = & \mathfrak{q} - (0,1). \end{array}$$

(Die Funktionsnamen r, l, u, d stammen von den Richtungen right, left, up, down.*)*

Ein zusammengesetztes Wort $\mathsf{vw} \in \mathcal{A}^*$ symbolisiert die verkettete Abbildung $\mathsf{v} \circ \mathsf{w}$:

$$\mathsf{v} \circ \mathsf{w} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } \mathfrak{q} \mapsto \mathsf{w}(\mathsf{v}(\mathfrak{q})).$$

Der Nullpunkt des $\mathbb{Z}^2$ sei $\mathfrak{o} = (0,0)$. Die Verschiebungen $x(\mathfrak{q}) - \mathfrak{q}$ eines beliebigen Punktes $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ zu $x(\mathfrak{q})$ seien für $x \in \mathcal{A}$ mit $\mathfrak{v}_x \in \mathbb{Z}^2$ bezeichnet. Folglich gilt $\mathfrak{v}_r = (1,0)$, $\mathfrak{v}_l = -(1,0)$, $\mathfrak{v}_u = (0,1)$, $\mathfrak{v}_d = -(0,1)$. Ein Punkt $\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}^2$ sei durch (p_x, p_y) dargestellt.
Die Interpretation von Wörtern als Abbildungen auf dem $\mathbb{Z}^2$ ist ein Homomorphismus

von der freien Struktur $(\mathcal{A}, \cdot)$ in die freie Struktur $(\mathcal{A}, \circ)$. Die Operatoren $\cdot$ und $\circ$ werden nicht geschrieben, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Operation es sich handelt.
Die Abbildungen r und l sowie u und d sind zu einander invers. Die Abbildungen ru und ur sowie ld und dl ordnen einem Punkt $\mathfrak{q}$ seine Diagonalnachbarn zu:

$$ru(\mathfrak{q}) = ur(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} + (1,1), \quad ld(\mathfrak{q}) = dl(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} - (1,1).$$

Eine Abbildung, die zusammen mit einer Abbildung x einen Diagonalnachbarn liefert, wird durch $^\perp$ gekennzeichnet. Die Inversen zweier Abbildungen x und $x^\perp$ werden durch $\bar{x}$ bzw. $\bar{x}^\perp$ symbolisiert. Die nebenstehende Tabelle zeigt die entsprechenden Funktionen.

x	$\bar{x}$	$x^\perp$	$\bar{x}^\perp$
r	l	u	d
l	r	d	u
u	d	r	l
d	u	l	r

2.2. Graphische Einbettung

Ein Gittergraph ist ein Graph, bei dem die Knotenmenge eine Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$ ist und jede Kante zwei benachbarte Knoten $\mathfrak{q}$, $x(\mathfrak{q})$ mit $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ und $x \in \{ r, l, u, d \}$ verbindet. Die „Lage“ der Knoten ist wesentlich; ein Umbenennen der Knoten führt in der Regel nicht zu einem isomorphen Gittergraphen. Eigenschaften wie gerichtet, ungerichtet, schlicht bleiben davon unberührt.
In [T02] werden Funktionen eingeführt, die einem Wort $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^n$ folgendes zuordnen:

- Die Knotenmenge $\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = \{ \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}) \mid i = 0, \ldots n \}$,
- den gerichteten Gittergraphen (möglicherweise mit Mehrfachkanten)

  $$g^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = \left(\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})) \}_{i=1,\ldots,n} \right),$$

- den schlichten gerichteten Gittergraphen $s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ zu $g^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ (ohne Mehrfachkanten)

  $$s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = (\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})) \mid i = 1, \ldots, n \}),$$

- die Kantenmenge $\|^{\mathfrak{a}}\mathsf{w}$ von $s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$

  $$\|^{\mathfrak{a}}\mathsf{w} = \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), w_i) \mid i = 1, \ldots, n \},$$

  wobei eine Kante durch ein Punkt-Richtungs-Paar anstatt eines Paares zweier Punkte dargestellt wird,

- das Bild (den Schatten von $s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$)

  $$p^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = (\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})), (\overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a})) \mid i = 0, \ldots, n \})$$

- und die Bildfläche

$$\boxdot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \underline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \le x \le \overline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \text{ und} \\ \underline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \le y \le \overline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \end{array} \right\},$$

wobei $\underline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$, $\underline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$, $\overline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ und $\overline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ die Randkoordinaten der Knoten aus $\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ darstellen:

$$\begin{aligned} \underline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \min\{\, x \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}, \quad & \underline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \min\{\, y \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}, \\ \overline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \max\{\, x \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}, \quad & \overline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \max\{\, y \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}. \end{aligned}$$

Der obere Index wird weggelassen, falls sich die Funktionen auf den Nullpunkt beziehen ($\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$).
Bildflächen sind Rechteckmengen (siehe [T02]). Eine Rechteckmenge $\mathfrak{P}$ ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt, die „untere, linke Ecke“ $(\underline{x},\underline{y})$ mit

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \min\{\, x \mid (x,y) \in \mathfrak{P} \,\}, \\ \underline{y} &= \min\{\, y \mid (x,y) \in \mathfrak{P} \,\} \end{aligned}$$

und die „obere, rechte Ecke“ $(\overline{x},\overline{y})$ mit

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \max\{\, x \mid (x,y) \in \mathfrak{P} \,\}, \\ \overline{y} &= \max\{\, y \mid (x,y) \in \mathfrak{P} \,\} \end{aligned}$$

oder die „obere, linke Ecke“ $(\underline{x},\overline{y})$ und die „untere, rechte Ecke“ $(\overline{x},\underline{y})$. Geschrieben wird eine Rechteckmenge als $[(\underline{x},\underline{y}),(\overline{x},\overline{y})]$. Die folgenden Schreibweisen sind äquivalent:

$$[(\underline{x},\underline{y}),(\overline{x},\overline{y})],\ [(\overline{x},\overline{y}),(\underline{x},\underline{y})],\ [(\underline{x},\overline{y}),(\overline{x},\underline{y})],\ [(\overline{x},\underline{y}),(\underline{x},\overline{y})].$$

Das Skalieren einer Bildfläche $\mathfrak{P} = [\mathfrak{p},\mathfrak{q}]$ um einen Faktor $s \in \mathbb{N}_0$ liefert die Bildfläche

$$s\mathfrak{P} = \{\, s\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{P} \,\} = [s\mathfrak{p}, s\mathfrak{q}].$$

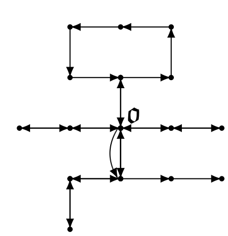
Die Vereinigung zweier Bildflächen ist im allgemeinen keine Rechteckmenge. Eine erweiterte Vereinigung zweier Bildflächen soll die Bildfläche der Vereinigung sein:

$$\mathfrak{P}_X \Cup \mathfrak{P}_Y = \mathfrak{P}_{X \cup Y}.$$

Das folgende Beispiel zeigt die genannten Graphen zu einem gewissen Wort.

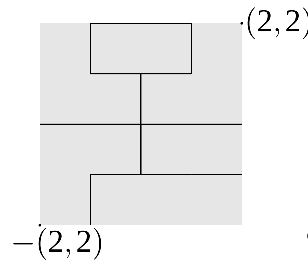
2.1. Beispiel: Es sei $\mathsf{w} = durrllurulldrdllrrdldurrr$.

Der gerichtete Gittergraph $g(\mathsf{w})$ ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen (zum Nachzeichnen beginne man im Nullpunkt $\mathfrak{o}$). Die Knoten sind durch Punkte $\cdot$ markiert. Der schlichte, gerichtete Gittergraph $s(\mathsf{w})$ entsteht durch Entfernen der Mehrfachkanten, in diesem Beispiel durch Streichen der Kante von $\mathfrak{o}$ nach unten zu $(0,-1)$.



Jedes Element der Kantenmenge $\|\mathsf{w}$ ist ein Paar $(\mathfrak{p}, x)$, wobei $\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}^2$ und $x \in \mathcal{A}$ gilt. Ein solches Paar $(\mathfrak{p}, x)$ ist genau dann in $\|\mathsf{w}$ enthalten, wenn der gerichtete Gittergraph eine Kante vom Knoten $\mathfrak{p}$ zum Knoten $x(\mathfrak{p})$ enthält. Beispielsweise gilt $((0,-1), r) \in \|\mathsf{w}$, weil es eine Kante vom Knoten $(0,-1)$ zu seinem rechten Nachbarn $r((0,-1)) = (1,-1)$ gibt. Andererseits gilt $((1,-1), l) \notin \|\mathsf{w}$, weil vom Knoten $(1,-1)$ keine Kante zu seinem linken Nachbarn $l((1,-1)) = (0,-1)$ führt.

Das Bild $p(\mathsf{w})$ entsteht aus dem schlichten, gerichteten Gitergraphen $s(\mathsf{w})$ durch Weglassen der Kantenrichtungen. Es ist nebenstehend abbgebildet. (Wenn ein Bild vorliegt, ist es nicht mehr von Bedeutung, wie es entstanden ist.) Die Knoten sind nicht gekennzeichnet. Die graue Fläche stellt die zugehörige Bildfläche $[-(2,2),(2,2)]$ dar.



♡

Für eine Wortmenge W sei mit $\|W$ die Vereinigung aller Kantenmengen zu den Wörtern aus W bezeichnet:

$$\|W = \bigcup_{\mathsf{w} \in W} \|\mathsf{w}.$$

Die Mengen $\mathcal{A}^*$ von Wörtern, $\{\, g^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}$ von gerichteten Gittergraphen, $\{\, s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}$ von schlichten, gerichteten Gittergraphen und $\{\, p^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}$ von Bildern ($\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*, \mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2$) bilden unterschiedliche Ebenen einer Abstrahierungshierarchie. Auf unterster Ebene werden Wörter einer Sprache betrachtet. Ein Interpretieren der Wörter als gerichtete Graphen mit Mehrfachkanten führt auf die nächsthöhere Stufe. Auf die dritte Ebene gelangt man durch Abstrahieren von den Mehrfachkanten. Durch Abstrahieren von den Kantenrichtungen gelangt man schließlich auf die Ebene der Bilder.

2.3. Spezielle Endomorphismen

Es seien κ, μ zwei natürliche Zahlen, $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_0$. Ein Endomorphismus h auf dem Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ heißt (κ, μ)-Endomorphismus, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ folgendes erfüllt ist: Wenn $x' \in h(\{\, x \,\})$ ist, so gilt

1. $x'(\mathfrak{o}) = \kappa \mathfrak{v}_x$ und
2. $\boxdot(x') \subseteq \kappa[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \Cup \mu[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}]$.

Aus der zweiten Bedingung folgt für das Leerwort: Wenn $\lambda' \in h(\{\, \lambda \,\})$ ist, gilt für die Bildfläche $\boxdot(\lambda') \subseteq [\mathfrak{o}, \mathfrak{o}]$. Da die leere Menge nicht in $\mathbb{A}$ auftritt, besteht die Bildfläche aus dem Nullpunkt: $\boxdot(\lambda') = [\mathfrak{o}, \mathfrak{o}]$; das Leerwort wird auf sich abgebildet: $h(\{\, \lambda \,\}) = \{\, \lambda \,\}$.
Das Anwenden von h auf eine Wortmenge W wird Ableiten genannt; die Menge $h(W)$ entsteht in einem Ableitungsschritt. Die n-stellige Verkettung eines (κ, μ)-Endomorphismus h wird kurz h^n geschrieben. Jedes Element von $h^n(\{\, \mathsf{w} \,\})$ mit $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ heißt n-te Ableitung von w; ein solches Wort wird auch mit $\mathsf{w}^{(n)}$ bezeichnet (w', w'', w''' für die ersten drei Ableitungen; $\mathsf{w}^{(0)} = \mathsf{w}$).
Das folgende Beispiel soll die Synchronisationsbedingungen veranschaulichen.

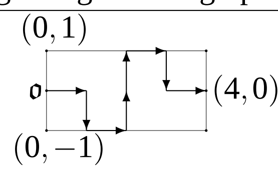
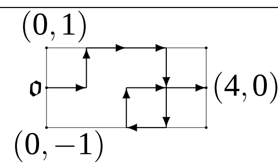
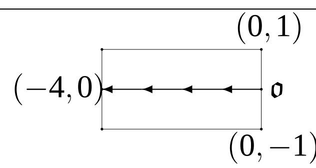
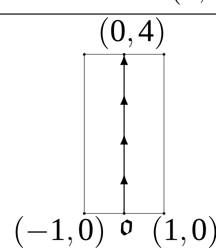
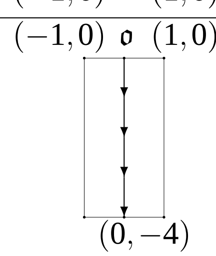
2.2. Beispiel: Es sei h ein Endomorphismus auf $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ mit

$$h(\{\, r \,\}) = \{\, rdruurdr, rurrddlurr \,\} \text{ und } h(\{\, x \,\}) = \{\, xxxx \,\} \text{ für } x \neq r.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&(rdruurdr)(\mathfrak{o}) = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_r = 4\mathfrak{v}_r,\\
&(rurrddlurr)(\mathfrak{o}) = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_l + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_r = 4\mathfrak{v}_r,\\
&(xxxx)(\mathfrak{o}) = 4\mathfrak{v}_x.
\end{aligned}$$

Die ersten Ableitungen sind $rdruurdr$, $rurrddlurr$, $llll$, $uuuu$ und $dddd$. Die zugehörigen schlichten, gerichteten Gittergraphen zeigt die folgende Tabelle.

Ableitung	Zugehöriger Gittergraph
$rdruurdr$	
$rurrddlurr$	
$llll$	
$uuuu$	
$dddd$	

Alle Punkte zu einer Ableitung $x' \in h(\{\, x \,\})$ liegen in der Bildfläche

$$\boxdot(x') \subseteq 4[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \Cup [\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\overline{x}^\perp}].$$

Somit ist der Endomorphismus h ein $(4,1)$-Endomorphismus.
Die erste Synchronisationsbedingung gibt an, wo die Bild-Endpunkte der ersten Ableitungen des Alphabet liegen; die zweite Bedingung bewirkt, daß das Bild zu jeder Ableitung von $x \in \mathcal{A}$ in einem gewissen Rechteck liegt. $\heartsuit$

Es sei w ein Wort aus $\mathcal{A}^n$; dann gilt wegen der Konkatenation von Wortmengen

$$\{\,\mathsf{w}\,\} = \{\,w_1 \cdots w_n\,\} = \{\,w_1\,\} \cdots \{\,w_n\,\}.$$

Desweiteren sei h ein (κ,μ)-Endomorphismus, dann gilt wegen der Operationstreue von h bezüglich der Konkatenation

$$h(\{\,\mathsf{w}\,\}) = h(\{\,w_1 \cdots w_n\,\}) = h(\{\,w_1\,\} \cdots \{\,w_n\,\}) = h(\{\,w_1\,\}) \cdots h(\{\,w_n\,\}).$$

Aus der Operationstreue von h bezüglich der Vereinigung folgt für eine endliche Wortmenge $W \in \mathbb{A}$

$$h(W) = \bigcup_{\mathsf{w} \in W} h(\{\,\mathsf{w}\,\}).$$

Die Mächtigkeit einer Menge M wird durch $|M|$ symbolisiert; folglich ist $|h(\{\,\mathsf{w}\,\})|$ die Anzahl der ersten Ableitungen von w.
Es sei bemerkt, daß es zu je zwei natürlichen Zahlen κ und μ einen (κ,μ)-Endomorphismus gibt; beispielsweise ist h mit $\{\,x\,\} \mapsto \{\,x^\kappa\,\}$ $(x \in \mathcal{A})$ für jede natürliche Zahl $\mu \in \mathbb{N}_0$ ein (κ,μ)-Endomorphismus.
Es sei $\mu_0 \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $\mu \geq \mu_0$:

$$\mu_0[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}] \subseteq \mu[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}].$$

2.3. Folgerung: *Jeder (κ,μ)-Endomorphismus ist auch ein $(\kappa,\mu+1)$-Endomorphismus.*

Der Parameter κ gibt eine Längenänderung beim Ableiten an; im Falle $\kappa = 0$ heißt der Endomorphismus längenkontrahierend, im Falle $\kappa = 1$ längenkonstant und im Falle $\kappa > 1$ längenexpandierend. Der Parameter μ ist eine obere Schranke für die Breitenänderung beim Ableiten.
Sind bei einem (κ,μ)-Endomorphismus h die atomaren Bilder einelementig, so hat jedes Wort genau eine Ableitung; die Mengenzeichen werden in diesem Falle weggelassen: $h(\mathsf{w}) = \mathsf{w}'$.

2.4. Ketten-Code-Bild-Systeme

In diesem Abschnitt werden synchrone, tabellierte Ketten-Code-Bild-Systeme (*sT0L*-Systeme) definiert, die dann mit synchrone, einfach-nichtdeterministische Ketten-Code-Bild-Systeme in Zusammenhang gebracht werden.

2.4.1. *sT0L*-Systeme

Ein synchrones, tabelliertes, kontextfreies Ketten-Code-Bild-System (genannt *sT0L*-System) ist ein Tripel

$$G = (\mathcal{A}, h, \omega)$$

mit dem Alphabet $\mathcal{A} = \{\, r, l, u, d \,\}$, einer endlichen, nichtleeren Menge $h = \{\, h_1, \dots, h_m \,\}$ von (κ_i, μ_i)-Endomorphismen h_i mit $i = 1, \dots, m$ und einem nichtleeren Startwort (Axiom) $\omega \in \mathcal{A}^+$.
Mit h^n sei die Menge aller n-stelligen Verknüpfungen von Elementen aus h bezeichnet:

$$h^n = \{\, h_{i_1} \circ \cdots \circ h_{i_n} \mid i_j \in \{\, 1, \dots, m \,\};\ j = 1, \dots, n \,\};$$

desweiteren sei $h^n(\{\, \mathsf{w} \,\})$ die Menge aller Wörter, die durch die Elemente von h^n entstehen:

$$h^n(\{\, \mathsf{w} \,\}) = \{\, h_*(\{\, \mathsf{w} \,\}) \mid h_* \in h^n \,\}.$$

Die von einem *sT0L*-System G erzeugte Bildsprache B_G ist die Menge aller Bilder von Ableitungen des Axioms ω:

$$B_G = \{\, p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in h^n(\{\, \omega \,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\}.$$

Ein *sT0L*-System heißt längenexpandierend, wenn mindestens ein (κ_i, μ_i)-Endomorphismus $h_i \in h$ längenexpandierend ist. Es heißt längenkontrahierend, wenn alle Endomorphismen aus h längenkontrahierend sind. Andernfalls ist mindestens ein Endomorphismus aus h längenkonstant; alle anderen sind längenkontrahierend. Diese *sT0L*-Systeme sollen längenkonstant heißen.
Gibt es zu einem *sT0L*-System G zwei natürliche Zahlen κ, μ, so daß alle auftretenden Endomorphismen (κ, μ)-Endomorphismen sind, so heißt G rein, andernfalls gemischt.
Bei einem längenkontrahierenden *sT0L*-System ist jeder auftretende Endomorphismus ein $(0, \mu_i)$-Endomorphismus und nach Folgerung 2.3 auch ein $(0, \mu)$-Endomorphismus für alle $\mu \geqq \max\{\, \mu_1, \dots, \mu_m \,\}$. Folglich sind längenkontrahierende *sT0L*-Systeme stets reine Systeme. Bei einem reinen, längenkonstanten *sT0L*-System sind alle auftretenden Endmorphismen $(1, \mu)$-Endomorphismen; bei einem gemischten, längenkonstanten *sT0L*-System tritt mindestens ein $(1, \mu)$- und mindestens ein $(0, \mu)$-Endomorphismus auf. Dabei gilt ebenfalls $\mu \geqq \max\{\, \mu_1, \dots, \mu_m \,\}$.
Um Untersuchungsergebnisse von einfach-nichtdeterministischen Systemen (*s0L*-Systemen) nutzen zu können, werden einfach-nichtdeterministische Unter- und Obersysteme definiert.

2.4.2. Einfach-nichtdeterministische Untersysteme

Ein *s0L*-System $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ heißt einfach-nichtdeterministisches Untersystem (auch *s0L*-Untersystem genannt) eines *sT0L*-System G (geschrieben $U \sqsubseteq G$), wenn jede Ableitung eines Wortes $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ mittels U auch Ableitung mittels G ist.

2.4. Folgerung: *Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ mit $h = \{ h_1, \dots, h_m \}$ ein sT0L-System. Ein s0L-System $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ ist genau dann ein s0L-Untersystem zu G, wenn es einen Index $i \in \{ 1, \dots, m \}$ derart gibt, daß für jeden Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ die Ableitungen mittels $h_\circ$ auch Ableitungen mittels h_i sind:*

$$h_\circ(\{ x \}) \subseteq h_i(\{ x \}) \quad \textit{für alle } x \in \mathcal{A} \textit{ und ein } i \in \{ 1, \dots, m \}.$$

Beweis: Wenn es einen Index $i \in \{ 1, \dots, m \}$ gibt, so daß $h_\circ(\{ x \}) \subseteq h_i(\{ x \})$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt, dann ist jede Ableitung eines Wortes $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ mittels $h_\circ$ auch Ableitung mittels h_i und damit auch mittels h:

$$h_\circ(\{ \mathsf{w} \}) \subseteq h_i(\{ \mathsf{w} \}) \subseteq h(\{ \mathsf{w} \}).$$

Folglich ist U ein *s0L*-Untersystem von G.
Gibt es keinen solchen Index, so gibt es zu jedem $i = 1, \dots, m$ einen Buchstaben x_i mit $h_\circ(\{ x_i \}) \not\subseteq h_i(\{ x_i \})$. Damit hat aber das Wort $x_1 \cdots x_m$ mittels $h_\circ$ eine Ableitung, die es bezüglich G nicht hat:

$$\forall i : h_\circ(\{ x_1 \cdots x_m \}) \not\subseteq h_i(\{ x_1 \cdots x_m \}).$$

Also ist U ein *s0L*-Untersystem von G. ❀

Ein *s0L*-Untersystem $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ zu einem *sT0L*-System $G = (\mathcal{A}, \{ h_1, \dots, h_m \}, \omega)$ heißt maximal, wenn bei obiger Inklusion Gleichheit gilt.

2.5. Folgerung: *Ein sT0L-System $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ mit $h = \{ h_1, \dots, h_m \}$ hat als maximale s0L-Untersysteme genau jene s0L-Systeme $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega)$ mit $i = 1, \dots, m$.*

Ein *s0L*-Untersystem $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega)$ eines *sT0L*-Systems $G = (\mathcal{A}, \{ h_1, \dots, h_m \}, \omega)$ erzeugt die Bildsprache

$$B_{U_i} = \{ p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in h_i^n(\{ \omega \}), n \in \mathbb{N}_0 \}.$$

2.6. Folgerung: *Die von einem s0L-Untersystem eines sT0L-Systems G erzeugte Bildsprache ist eine Teilmenge der von G erzeugten Bildsprache.*

Beweis: Es seien $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sT0L*-System mit einer Menge h von Endomorphismen $h_1, \dots, h_m$ und $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ ein *s0L*-Untersystem von G. Nach Folgerung 2.4 gilt für einen Index $i \in \{ 1, \dots, m \}$ und alle Buchstaben $x \in \mathcal{A}$

$$h_\circ(\{ x \}) \subseteq h_i(\{ x \}).$$

Da für jede Ableitungsstufe $n \in \mathbb{N}_0$ die n-stellige Verknüpfung h_i^n Element von h^n ist, gilt für die Bildsprache B_U:

$$\begin{aligned} B_U &= \{ p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} = h_\circ^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0 \} \\ &\subseteq \{ p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in h_i^n(\{ \omega \}), n \in \mathbb{N}_0 \} \\ &\subseteq \{ p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in h^n(\{ \omega \}), n \in \mathbb{N}_0 \} = B_G. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ❀

Folgendes Beispiel illustriert den Zusammenhang und zeigt, daß ein maximales *s0L*-Untersystem im allgemeinen eine echte Teilmenge der Bildmenge von G erzeugt.

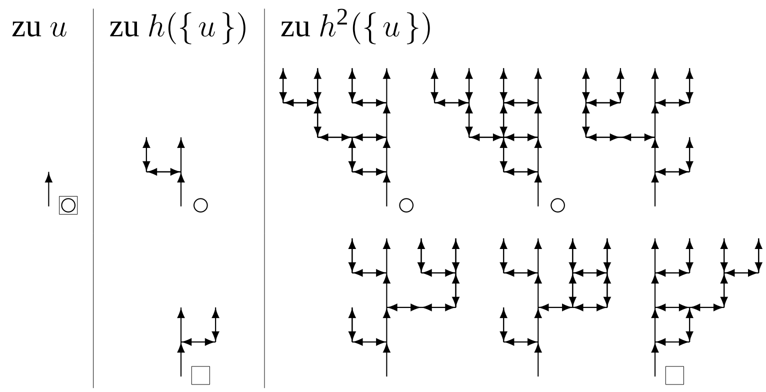
2.7. Beispiel: Es seien h_1, h_2 zwei $(2,1)$-Endomorphismen mit

$$h_1(\{u\}) = \{uludru\},\ h_1(\{r\}) = \{rr, rudr\},\ h_1(\{x\}) = \{xx\} \text{ für } x \in \{l, d\}$$

und

$$h_2(\{u\}) = \{urudlu\},\ h_2(\{x\}) = \{xx\} \text{ für } x \neq u.$$

Desweiteren seien $h = \{h_1, h_2\}$ und G das *sT0L*-System $(\mathcal{A}, h, u)$. Die beiden *s0L*-Systeme $U_1 = (\mathcal{A}, h_1, u)$, $U_2 = (\mathcal{A}, h_2, u)$ sind die einzigen maximalen *s0L*-Untersysteme von G.
Nach zweimaligem Ableiten des Startwortes u mittels G liegen folgende schlichte, gerichtete Gittergraphen vor:



Die Gittergraphen, die durch zweimaliges Ableiten mittels U_1 bzw. U_2 entstehen, sind durch $\circ$ bzw. $\square$ markiert. Andere Graphen entstehen bei zweimaligem Ableiten nicht. $\heartsuit$

2.4.3. Einfach-nichtdeterministische Obersysteme

Ein *s0L*-System $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ heißt einfach-nichtdeterministisches Obersystem (auch *s0L*-Obersystem genannt) eines tabellierten Ketten-Code-Bild-Systems G (geschrieben $S \sqsupseteq G$), wenn jede Ableitung eines Wortes w $\in \mathcal{A}^*$ mittels G auch Ableitung mittels S ist.

2.8. Folgerung: *Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ mit $h = \{h_1, \ldots, h_m\}$ ein sT0L-System. Es s0L-System $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ ist genau dann ein s0L-Obersystem zu G, wenn für jeden Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ die Ableitungen mittels der Endomorphismen h_i für $i = 1, \ldots, m$ auch Ableitungen mittels $h_\circ$ sind:*

$$\bigcup_{i=1}^{m} h_i(\{x\}) \subseteq h_\circ(\{x\}) \quad \textit{für } x \in \mathcal{A}.$$

Beweis: Für ein beliebiges Wort w gilt $h(\{\,\mathsf{w}\,\}) = \bigcup_{i=1}^{m} h_i(\{\,\mathsf{w}\,\})$. Wenn für jeden Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ die Inklusion $\bigcup_{i=1}^{m} h_i(\{\,x\,\}) \subseteq h_\circ(\{\,x\,\})$ gilt, so gilt sie auch für Wörter. Daher sind die Ableitungen eines Wortes w mittels h auch Ableitungen mittels $h_\circ$; das *s0L*-System S ist ein *s0L*-Obersystem zu G.
Gilt die Inklusion nicht, so gibt es einen Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ und ein Wort $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$, das Ableitung von x bezüglich G ist, aber nicht Ableitung von x bezüglich S ist. Also ist nicht jedes Wort, das Ableitung mittels G ist auch eine mittels S. Folglich ist S kein Obersystem. ♣

Ein *s0L*-Obersystem $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ zu einem *sT0L*-System

$$G = (\mathcal{A}, \{\,h_1, \ldots, h_m\,\}, \omega)$$

heißt minimal, wenn bei obiger Inklusion Gleichheit gilt:

$$h_\circ(\{\,x\,\}) = \bigcup_{i=1}^{m} h_i(\{\,x\,\}) \quad \text{für } x \in \mathcal{A}.$$

Das folgende Lemma trifft Aussagen über die Existenz von *s0L*-Obersystemen.

2.9. Lemma: *Es sei $G = (\mathcal{A}, \{\,h_1, \ldots, h_m\,\}, \omega)$ ein sT0L-System. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Das System G hat genau dann ein s0L-Obersystem, wenn es zwei natürliche Zahlen κ, μ gibt, so daß jeder (κ_i, μ_i)-Endomorphismus h_i ($i = 1, \ldots, m$) auch ein (κ, μ)-Endomorphismus ist.*
2. *Wenn G ein s0L-Obersystem hat, so hat es genau ein minimales s0L-Obersystem $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$.*

Beweis: Es sei $G = (\mathcal{A}, \{\,h_1, \ldots, h_m\,\}, \omega)$ ein *sT0L*-System.

1. Zunächst seien mindestens zwei κ-Parameter verschieden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien dies κ_1 und κ_2. Angenommen, es gäbe ein *s0L*-Obersystem $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ zu G. Dann muß jede Ableitung aus $h_1(\{\,x\,\})$, $h_2(\{\,x\,\})$ zu $h_\circ(\{\,x\,\})$ ($x \in \mathcal{A}$) gehören, da jede Ableitung mittels G auch Ableitung mittels S sein soll. Aber es gibt keine natürliche Zahl κ, so daß $h_\circ$ die Bedingungen für einen (κ, μ)-Endomorphismus erfüllt (bei beliebigem μ-Parameter), folglich gibt es auch kein *s0L*-Obersystem für G.
   Es sei nun G derart, daß jedes h_i ein (κ, μ_i)-Endomorphismus ist. Nach Folgerung 2.3 ist jedes h_i auch ein (κ, μ)-Endomorphismus mit $\mu \geq \max\{\,\mu_1, \ldots, \mu_m\,\}$. Damit ist auch $h_\circ$ mit $h_\circ(\{\,x\,\}) = h_1(\{\,x\,\}) \cup \cdots \cup h_m(\{\,x\,\})$ ein (κ, μ)-Endomorphismus und das System $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ ist ein *s0L*-Obersystem für G.

2. Wenn G ein *s0L*-Obersystem hat, so existieren nach 1. zwei natürliche Zahlen κ, μ und jeder Endomorphismus h_i ist ein (κ,μ)-Endomorphismus. Dann ist $h_\circ$ mit $h_\circ(\{x\}) = h_1(\{x\}) \cup \cdots \cup h_m(\{x\})$ eindeutig bestimmt und auch ein (κ,μ)-Endomorphismus. Folglich ist $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ ein minimales *s0L*-Obersystem zu G. Es ist eindeutig bestimmt.

♣

Die erste Aussage des Lemmas bedeutet, daß ein *sT0L*-System genau dann ein *s0L*-Obersystem hat, wenn es ein reines *sT0L*-System ist. Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, daß ein gemischtes *sT0L*-System kein *s0L*-Obersystem hat.

2.10. Beispiel: Es sei $G = (\mathcal{A}, \{h_1, h_2\}, r)$ ein *sT0L*-System mit zwei Endomorphismen h_1, h_2, wobei folgendes gelten soll: $h_1 : \{r\} \mapsto \{rud, rdu\}, \{x\} \mapsto \{x\}$ $(x \neq r)$ und $h_2 : \{x\} \mapsto \left\{x^\perp \overline{x}^\perp\right\}$. Der Endomorphismus h_1 erfüllt die Bedingungen für einen $(1,1)$-Endomorphismus, h_2 für einen $(0,1)$-Endomorphismus. Gäbe es ein *s0L*-Obersystem $S = (\mathcal{A}, h_\circ, r)$ zu G, müßte $\{rud, rdu, ud\}$ eine Teilmenge von $h_\circ(\{r\})$ sein. Auf Grund der ersten Synchronisationsbedingung (s. S. 6) gäbe es dann eine natürliche Zahl κ, die sowohl die Gleichungen $(rud)(\mathfrak{o}) = \kappa(1,0)$ und $(rdu)(\mathfrak{o}) = \kappa(1,0)$ als auch die Gleichung $(ud)(\mathfrak{o}) = \kappa(1,0)$ erfüllt. Die ersten beiden Gleichungen sind wegen der Beziehung $(rud)(\mathfrak{o}) = (rdu)(\mathfrak{o}) = (1,0)$ nur für $\kappa = 1$, die zweite ist wegen $(ud)(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ nur für $\kappa = 0$ erfüllt. Da es keine Zahl κ gibt, die alle Gleichungen erfüllt, ist $h_\circ$ kein (κ,μ)-Endomorphismus; folglich gibt es kein *s0L*-Obersystem zu G. ♡

Aus dem vorangegangenen Lemma kann man folgende Schlußfolgerung über die Beziehung zwischen Bildsprachen ziehen.

2.11. Folgerung: *Hat ein sT0L-System G ein s0L-Obersystem, dann ist die von G erzeugte Bildsprache B_G eine Teilmenge jener Bildsprache B_S, die von dem minimalen s0L-Obersystem S zu G erzeugt wird.*

Beweis: Es seien $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sT0L*-System mit einer Endomorphismen-Menge h, $h = \{h_1, \ldots, h_m\}$, und $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ das minimale *s0L*-Obersystem von G.
Desweiteren sei w eine n-te Ableitung des Axioms ω mittels G: $\mathsf{w} \in h^n(\{\omega\})$. Dann existieren Indices $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$, so daß

$$\mathsf{w} \in (h_{i_1} \circ h_{i_2} \circ \cdots \circ h_{i_n})(\{\omega\})$$

gilt. Mit Lemma 2.9 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathsf{w} \in\, & h_{i_n}(h_{i_{n-1}}(h_{i_{n-2}}(\ldots h_{i_1}(\{\omega\})\ldots))) \\
& \subseteq h_\circ(h_{i_{n-1}}(h_{i_{n-2}}(\ldots h_{i_1}(\{\omega\})\ldots))) \\
& \subseteq h_\circ(h_\circ(h_{i_{n-2}}(\ldots h_{i_1}(\{\omega\})\ldots))) \\
& \quad \vdots \\
& \subseteq h_\circ^n(\{\omega\}),
\end{aligned}$$

also kurz $\mathsf{w} \in h_\circ^n(\{\,\omega\,\})$. Damit ist jede n-te Ableitung von ω mittels G auch eine mittels S und es gilt für die erzeugten Bildsprachen

$$\begin{aligned} B_G &= \{\, p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in h^n(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\} \\ &\subseteq \{\, p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in h_\circ^n(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\} \\ &= B_S, \end{aligned}$$

was die Behauptung besagt. ☘

Das folgende Beispiel illustriert den Zusammenhang und zeigt, daß ein minimales *s0L*-Obersystem im allgemeinen eine echte Obermenge der Bildmenge von G erzeugt. Es baut auf dem Beispiel zu *s0L*-Untersystemen auf (Beispiel 2.7).

2.12. Beispiel: Es seien h_1, h_2 die beiden $(2,1)$-Endomorphismen aus dem Beispiel zu *s0L*-Untersystemen. Zur Erinnerung seien sie hier noch einmal angegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} &h_1(\{\,u\,\}) = \{\,uludru\,\} \\ &h_1(\{\,r\,\}) = \{\,rr, rudr\,\} \\ &h_1(\{\,x\,\}) = \{\,xx\,\} \text{ für } x \in \{\,l, d\,\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &h_2(\{\,u\,\}) = \{\,urudlu\,\} \\ &h_2(\{\,x\,\}) = \{\,xx\,\} \text{ für } x \neq u. \end{aligned}$$

Das System $G = (\mathcal{A}, \{\,h_1, h_2\,\}, u)$ ist ein *sT0L*-System und hat als minimales *s0L*-Obersystem

$$S = (\mathcal{A}, h, \omega),$$

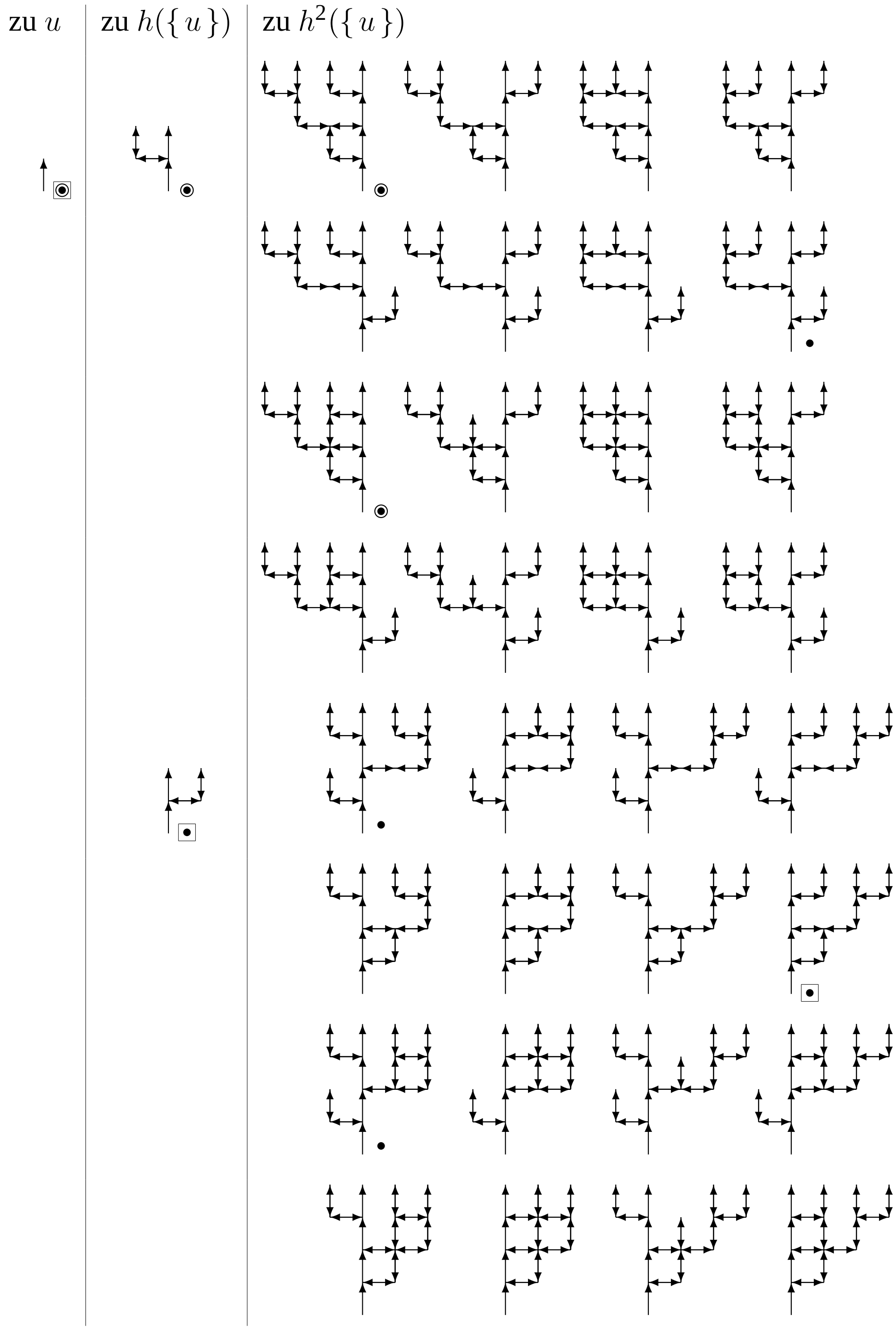
wobei h jener $(2,1)$-Endomorphismus mit

$$h(\{\,x\,\}) = \{\,h_1(x), h_2(x)\,\}$$

ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned} &h(\{\,u\,\}) = \{\,uludru, urudlu\,\} \\ &h(\{\,r\,\}) = \{\,rr, rudr\,\} \\ &h(\{\,x\,\}) = \{\,xx\,\} \text{ für } x \in \{\,l, d\,\}. \end{aligned}$$

Nach zweimaligem Ableiten des Startwortes u mittels S liegen folgende schlichte, gerichtete Gittergraphen vor:



Jene Gittergraphen, die durch zweimaliges Ableiten mittels G entstehen, sind durch das Zeichen • markiert. Durch zweimaliges Ableiten mittels U_1 bzw. U_2 entstehen die durch ○ bzw. □ markierten Gittergraphen. Andere Graphen entstehen bei zweimaligem Ableiten nicht. ♡

3. Endlichkeit von *sT0L*-Systemen

Bei Aufgaben, in denen Ketten-Code-Bild-Systeme eine Rolle spielen, muß geklärt werden, ob ein gegebenes System eine endliche oder unendliche Bildsprache erzeugt oder welche Systeme Bildsprachen mit gewissen Eigenschaften erzeugen.
In diesem Abschnitt werden Bedingungen hergeleitet, anhand derer entschieden werden kann, ob ein *sT0L*-System eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.
Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sT0L*-System mit einer Menge $\{h_1, \ldots, h_m\}$ von (κ_i, μ_i)-Endomorphismen h_i. Die Ableitung eines Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ mittels einer n-stelligen Verknüpfung $h_{i_1} \circ \cdots \circ h_{i_n}$ $(h_{i_1}, \ldots, h_{i_j} \in h)$ bildet den Nullpunkt $\mathfrak{o}$ auf den Punkt $\kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_n} \mathfrak{v}_x$ ab. Dies kann mittels vollständiger Induktion über n aus der ersten Synchronisationsbedingung geschlossen werden. Außerdem folgt für alle Ableitungen $x' \in h_i(\{x\})$ mittels eines Endomorphismus $h_i \in h$, daß $x'(\mathfrak{o}) = \kappa_i \mathfrak{v}_x + c(\mathfrak{v}_x + \mathfrak{v}_{\bar{x}}) + d(\mathfrak{v}_{x^\perp} + \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp})$ für zwei natürliche Zahlen c, d gilt. Daraus folgt, daß $x^\perp$ und $\bar{x}^\perp$ gleich häufig in der Ableitung x' auftreten, und die Anzahl der Vorkommen von x um κ_i größer ist, als die von $\bar{x}$. Diese Beobachtungen sind in der nächsten Folgerung zusammengefaßt.

3.1. Folgerung: *Für alle Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ gilt: Wenn x' eine Ableitung von x mittels eines Endomorphismus $h_i \in h$ ist und $x^{(n)}$ eine n-te Ableitung von x ist,*

$$x^{(n)} \in (h_{i_1} \circ \cdots \circ h_{i_n})(\{x\}) \quad \textit{für } h_{i_1}, \ldots, h_{i_n} \in h,$$

so gilt

1. $x^{(n)}(\mathfrak{o}) = \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_n} \mathfrak{v}_x$,
2. $|x'|_x = \kappa_i + |x'|_{\bar{x}}$,
3. $|x'|_{x^\perp} = |x'|_{\bar{x}^\perp}$.

Aus der ersten Aussage kann man für Wörter sofort folgendes schließen.

3.2. Folgerung: *Für alle Wörter $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ gilt: Wenn $\mathsf{w}^{(n)} \in (h_{i_1} \circ \cdots \circ h_{i_n})(\{\mathsf{w}\})$ eine n-te Ableitung von w ist, so gilt $\mathsf{w}^{(n)}(\mathfrak{o}) = \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_n} \mathsf{w}(\mathfrak{o})$.*

Beweis: Es seien $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_l$ ein Wort aus $\mathcal{A}^l$, $w_1^{(n)}, \ldots, w_l^{(n)}$ Ableitungen von $w_1, \ldots, w_l$ mittels $h_{i_1} \circ \cdots \circ h_{i_n}$ und $\mathsf{w}^{(n)} = w_1^{(n)} \cdots w_l^{(n)}$. Dann gilt $\mathsf{w}^{(n)} \in (h_{i_1} \circ \cdots \circ h_{i_n})(\{\mathsf{w}\})$ und

$$\begin{aligned}
\mathsf{w}^{(n)}(\mathfrak{o}) &= (w_1^{(n)} \cdots w_l^{(n)})(\mathfrak{o}) \\
&= w_1^{(n)}(\mathfrak{o}) + \cdots + w_l^{(n)}(\mathfrak{o}) && \text{([T02], Folg. 2.3)} \\
&= \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_n} \mathfrak{v}_{w_1} + \cdots + \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_n} \mathfrak{v}_{w_l} && \text{Folg. 3.1} \\
&= \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_n} (w_1(\mathfrak{o}) + \cdots + w_l(\mathfrak{o})) \\
&= \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_n} \mathsf{w}(\mathfrak{o}) && \text{([T02], Folg. 2.3).}
\end{aligned}$$

♣

Die Ketten-Code-Bild-Systeme werden nach ihrem „Längenverhalten“ getrennt betrachtet, zunächst längenkontrahierende, dann längenexpandierende und schließlich längenkonstante Systeme.

3.1. Längenkontrahierende Ketten-Code-Bild-Systeme

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenkontrahierendes *sT0L*-System mit einer endlichen, nichtleeren Menge $h = \{ h_1, \ldots, h_m \}$ von $(0,\mu)$-Endomorphismen. Zunächst stellt jedes h_i einen $(0,\mu_i)$-Endomorphismus dar. Es sei μ sei das Maximum aller μ_i:

$$\mu = \max\{ \mu_i \mid i = 1, \ldots, m \}.$$

Nach Folgerung 2.3 ist jedes h_i auch ein $(0,\mu)$-Endomorphismus.
Das minimale *s0L*-Obersystem $S = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ zu G ist ein längenkontrahierendes *s0L*-System, dessen Endomorphismus $h_\circ$ ebenfalls ein $(0,\mu)$-Endomorphismus ist. Die Bildsprache B_S enthält nach Satz 3.1 aus [T03a] höchstens $(\mu+1)^4+1$ Elemente. Aus Lemma 2.9 und Folgerung 2.11 schließt man, daß B_G ebenfalls höchstens $(\mu+1)^4+1$ Elemente enthält.

3.3. Satz: *Jedes längenkontrahierende sT0L-System* $G = (\mathcal{A}, \{ h_1, \ldots, h_m \}, \omega)$*, wobei jeder Endomorphismus* h_i *(*$i = 1, \ldots, m$*) ein* $(0,\mu)$*-Endomorphismus ist, erzeugt eine endliche Bildsprache* B_G*. Sie enthält höchstens* $(\mu+1)^4+1$ *Elemente:*

$$|B_G| \leq (\mu+1)^4 + 1 < \infty.$$

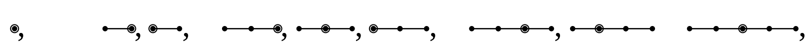
Die folgenden Überlegungen zeigen, daß diese Schranke auch angenommen wird. Es sei $G = (\mathcal{A}, \{ h \}, ruld)$ ein *sT0L*-System, wobei h ein $(0,\mu)$-Endomorphismus mit

$$\begin{aligned} h(\{ r \}) &= \{ u^i d^j u^{j-i} \mid j = 0, \ldots, 2\mu;\ i = \max\{ 0, j-\mu \}, \ldots, \min\{ \mu, j \} \}, \\ h(\{ u \}) &= \{ r^i l^j r^{j-i} \mid j = 0, \ldots, 2\mu;\ i = \max\{ 0, j-\mu \}, \ldots, \min\{ \mu, j \} \}, \\ h(\{ l \}) &= h(\{ d \}) = \{ \lambda \} \end{aligned}$$

sei. Damit repräsentieren die Ableitungen von r und u alle möglichen Bilder. Dies sei für $\mu = 2$ am Beispiel u verdeutlicht. Die Menge der Ableitungen besteht aus

	λ,	lr, rl,	l^2r^2, rl^2r, r^2l^2,	rl^3r^2, r^2l^3r,	$r^2l^4r^2$
bei	$j = 0$,	$j = 1$,	$j = 2$,	$j = 3$,	$j = 4$;

die zugehörigen Bilder sind



wobei die Nullpunkte umrandet sind. Es gibt kein Wort, welches Ableitung von u mittels eines $(0,2)$-Endomorphismus ist und ein anderes Bild erzeugt. Die Anzahl der Ableitungen von r und u beträgt jeweils $(\mu+1)^2$; damit hat das Axiom $ruld$ auf der ersten Stufe genau $(\mu+1)^4$ Ableitungen, von denen keine zwei gleiche Bilder beschreiben. Da das Bild des Axioms nicht unter denen der Ableitungen auftritt, erzeugt das *sT0L*-System G mindestens $(\mu+1)^4+1$ Bilder. Nach Satz 3.3 erzeugt G höchstens $(\mu+1)^4+1$ Bilder, woraus folgt, daß G genau $(\mu+1)^4+1$ Bilder erzeugt.

3.2. Längenexpandierende Ketten-Code-Bild-Systeme

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenexpandierendes *sT0L*-System mit $h = \{ h_1, \dots, h_m \}$, dann ist mindestens einer der Endomorphismen h_i längenexpandierend; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies etwa h_1. Daher ist das *s0L*-Untersystem $U = (\mathcal{A}, h_1, \omega)$ längenexpandierend. In [T03a] wurde gezeigt, daß die Bildsprache jedes längenexpandierenden *s0L*-Systems unendlich ist. Da die von U erzeugte Bildsprache eine Teilmenge der von G erzeugten ist (Folg. 2.6), ist auch die Bildsprache des *sT0L*-Systems G unendlich.

3.4. Satz: *Jedes längenexpandierende sT0L-System erzeugt eine unendliche Bildsprache.*

3.3. Längenkonstante Ketten-Code-Bild-Systeme

Längenkonstante *sDT0L*-Systeme und längenkonstante *s0L*-Systeme können sowohl endliche als auch unendliche Bildsprachen erzeugen. Da sie Spezialfälle von *sT0L*-Systemen sind, können auch längenkonstante *sT0L*-Systeme endliche und unendliche Bildsprachen erzeugen. In diesem Abschnitt werden Kriterien hergeleitet, anhand derer entschieden werden kann, ob ein *sT0L*-System eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.
Es seien $g = \{ g_1, \dots, g_k \}$ eine endliche, nichtleere Menge von $(0, \mu)$-Endomorphismen und $h = \{ h_1, \dots, h_m \}$ eine endliche, nichtleere Menge von $(1, \mu)$-Endomorphismen. Die Vereinigung beider Mengen sei $f = g \cup h$. Desweiteren sei $G = (\mathcal{A}, f, \omega)$ ein *sT0L*-System. Die Untersuchungen an deterministischen, einfach-nichtdeterministischen und deterministisch-tabellierten Systemen ([T02], [T03a], [T03b]) legen folgende Vermutung nahe: Die von G erzeugte Bildsprache B_G ist genau dann endlich, wenn für jeden Buchstaben $x \in [f^2(\{ \omega \})]$, der in einer zweiten Ableitung von ω auftritt, die ersten drei Ableitungen von x mittels der längenkonstanten Endmorphismen aus h keine andere x-Kante als $(\mathfrak{o}, x)$ liefern:

$$|B_G| < \infty \Longleftrightarrow \forall x \in [f^2(\{ \omega \})]: \; \|_x x = \|_x h(\{ x \}) = \|_x h^2(\{ x \}) = \|_x h^3(\{ x \}).$$

Angenommen, es gibt einen Buchstaben $x \in [f^2(\{ \omega \})]$ in einer zweiten Ableitung von ω und eine Ableitungsstufe $l \in \{ 1, 2, 3 \}$, so daß bei l-maligem Ableiten von x eine neue x-Kante entsteht:

$$\exists x \in [f^2(\{ \omega \})] \, \exists l \in \{ 1, 2, 3 \} : \|_x x \neq \|_x h^l(\{ x \}).$$

Nach Folg. 3.1 gilt für jede l-te Ableitung $x^{(l)} \in h^l(\{ x \})$ mittels längenkonstanter Endomorphismen die Gleichung

$$x^{(l)}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{v}_x,$$

also tritt der Buchstabe x auch in jeder Ableitung $x^{(l)}$ auf. Die Kantenmenge $\|_x x$ besteht aus der Kante $(\mathfrak{o}, x)$. In der Kantenmenge der l-ten Ableitungen $h^l(\{ x \})$ gibt es laut Voraussetzung eine andere x-Kante: $(\mathfrak{q}, x) \in \|_x h^l(\{ x \})$ mit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{o}$.

Es sei $x^{(l)} \in h^l(\{x\})$ eine l-te Ableitung von x. Da der Buchstabe x im Wort $x^{(l)}$ auftritt, gibt es zwei Wörter $\widehat{\mathsf{x}}$, $\widetilde{\mathsf{x}}$, so daß

$$x^{(l)} = \widehat{\mathsf{x}}\, x\, \widetilde{\mathsf{x}} \quad \text{und} \quad \widehat{\mathsf{x}}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{q}$$

gilt. Beim l-maligen Ableiten von $x^{(l)}$ mittels längenkonstanter Endomorphismen entsteht ein Wort $x^{(2l)} = \widehat{\mathsf{x}}^{(l)}\, \widehat{\mathsf{x}}\, x\, \widetilde{\mathsf{x}}\, \widetilde{\mathsf{x}}^{(l)}$ mit

$$\widehat{\mathsf{x}}^{(l)} \in h^l(\{\widehat{\mathsf{x}}\}) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathsf{x}}^{(l)} \in h^l(\{\widetilde{\mathsf{x}}\}).$$

Daher ist das Wort $x^{(2l)}$ eine $2l$-te Ableitung von x: $x^{(2l)} \in (h^l)^2(\{x\}) \subseteq h^{2l}(\{x\})$. Nach Folgerung 2.2 aus [T02] und 3.1 gilt

$$(\widehat{\mathsf{x}}^{(l)}\, \widehat{\mathsf{x}})(\mathfrak{o}) = \widehat{\mathsf{x}}^{(l)}(\mathfrak{o}) + \widehat{\mathsf{x}}(\mathfrak{o}) = \widehat{\mathsf{x}}(\mathfrak{o}) + \widehat{\mathsf{x}}(\mathfrak{o}) = 2\mathfrak{q}.$$

Daher ist die Kante $(2\mathfrak{q}, x)$ Element von $\|_x x^{(2l)}$. Allgemein gilt: Durch nl-maliges Ableiten von x entsteht ein Wort

$$x^{(nl)} = \widehat{\mathsf{x}}^{((n-1)l)} \cdots \widehat{\mathsf{x}}^{(l)}\, \widehat{\mathsf{x}}\, x\, \widetilde{\mathsf{x}}\, \widetilde{\mathsf{x}}^{(l)} \cdots \widetilde{\mathsf{x}}^{((n-1)l)},$$

mit $\mathsf{y}^{(kl)} \in h^{kl}(\{\mathsf{y}\})$ für $\mathsf{y} \in \{\widehat{\mathsf{x}}, \widetilde{\mathsf{x}}\}$ und $k = 1, \ldots, n-1$. Analog zu oben gilt

$$(n\mathfrak{q}, x) \in \|_x x^{(nl)}.$$

Da x in einer zweiten Ableitung des Axioms ω auftritt, gibt es von ω eine zweite Ableitung

$$\mathsf{w} = \widehat{\mathsf{w}}\, x\, \widetilde{\mathsf{w}} \in f^2(\{\omega\}).$$

Mit je einer (nl)-ten Ableitung $\widehat{\mathsf{w}}^{(nl)} \in h^{nl}(\{\widehat{\mathsf{w}}\})$ und $\widetilde{\mathsf{w}}^{(nl)} \in h^{nl}(\{\widetilde{\mathsf{w}}\})$ ist das Wort $\mathsf{w}^{(nl)} = \widehat{\mathsf{w}}^{(nl)} x^{(nl)} \widetilde{\mathsf{w}}^{(nl)}$ eine (nl)-te Ableitung von w:

$$\mathsf{w}^{(nl)} \in h^{nl}(\{\mathsf{w}\}).$$

Für die Kantenmenge von $\mathsf{w}^{(nl)}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathsf{w}^{(nl)} &= \|\widehat{\mathsf{w}}^{(nl)} \cup \|^{\widehat{\mathsf{w}}^{(nl)}(\mathfrak{o})} x^{(nl)} \cup \|^{(\widehat{\mathsf{w}}^{(nl)} x^{(nl)})(\mathfrak{o})} \widetilde{\mathsf{w}}^{(nl)} && \text{([T02], Folg. 2.4)} \\ &= \|\widehat{\mathsf{w}}^{(nl)} \cup \|^{\widehat{\mathsf{w}}(\mathfrak{o})} x^{(nl)} \cup \|^{(\widehat{\mathsf{w}} x)(\mathfrak{o})} \widetilde{\mathsf{w}}^{(nl)} && \text{(Folg. 3.2).} \end{aligned}$$

Da $(n\mathfrak{q}, x) \in \|_x x^{(nl)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $(n\mathfrak{q} + \widehat{\mathsf{w}}(\mathfrak{o}), x) \in \|^{\widehat{\mathsf{w}}(\mathfrak{o})} x^{(nl)}$, also auch

$$(n\mathfrak{q} + \widehat{\mathsf{w}}(\mathfrak{o}), x) \in \|\mathsf{w}^{(nl)}.$$

Damit gehört für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Punkt $n\mathfrak{q} + \widehat{\mathsf{w}}(\mathfrak{o})$ zur Knotenmenge von $\mathsf{w}^{(nl)}$:

$$n\mathfrak{q} + \widehat{\mathsf{w}}(\mathfrak{o}) \in \odot \mathsf{w}^{(nl)}.$$

Das Wort $\mathsf{w}^{(nl)}$ ist eine (nl)-te Ableitung einer zweiten Ableitung des Axioms, also eine $(nl+2)$-te Ableitung des Axioms:

$$\mathsf{w}^{(nl)} \in f^{nl+2}(\{\,\omega\,\}).$$

Daher gilt für die Knotenmenge

$$\odot\mathsf{w}^{(nl)} \in \Big\{\, \odot\mathsf{v} \mid \mathsf{v} \in f^{nl+2}(\{\,\omega\,\}) \,\Big\}$$

bzw.

$$\Big\{\, \odot\mathsf{w}^{(nl)} \,\Big\} \subseteq \Big\{\, \odot\mathsf{v} \mid \mathsf{v} \in f^{nl+2}(\{\,\omega\,\}) \,\Big\},$$

woraus für die Vereinigung über alle Ableitungsstufen $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion

$$\Big\{\, \odot\mathsf{w}^{(nl)} \mid n \in \mathbb{N} \,\Big\} \subseteq \Big\{\, \odot\mathsf{v} \mid \mathsf{v} \in f^{nl+2}(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N} \,\Big\}$$

folgt. Die Menge $\big\{\, \odot\mathsf{v} \mid \mathsf{v} \in f^{nl+2}(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N} \,\big\}$ ist Teilmenge von

$$\{\, \odot\mathsf{v} \mid \mathsf{v} \in f^{n}(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\}.$$

Da $\mathfrak{q}$ vom Nullpunkt verschieden ist, gibt es unendlich viele Knoten $n\mathfrak{q} + \widehat{\mathsf{w}}(\mathfrak{o})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für jedes n ist die Knotenmenge $\odot\mathsf{w}^{(nl)}$ endlich, folglich gibt es unendlich viele Knotenmengen:

$$\Big|\Big\{\, \odot\mathsf{w}^{(nl)} \mid n \in \mathbb{N} \,\Big\}\Big| = \infty.$$

Aus der Inklusion

$$\Big\{\, \odot\mathsf{w}^{(nl)} \,\Big|\, n \in \mathbb{N} \,\Big\} \subseteq \{\, \odot\mathsf{v} \mid \mathsf{v} \in f^{n}(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\}$$

folgt die Unendlichkeit des Mengensystems aller abgeleiteten Knotenmengen:

$$|\{\, \odot\mathsf{v} \mid \mathsf{v} \in f^{n}(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\}| = \infty.$$

Wenn sich zwei Knotenmengen $\odot\mathsf{u}$, $\odot\mathsf{v}$ unterscheiden, so sind auch die entsprechenden Bilder verschieden: $p(\mathsf{u}) \neq p(\mathsf{v})$. Daher ist auch die Bildsprache B_G unendlich:

$$|B_G| = |\{\, p(\mathsf{v}) \mid \mathsf{v} \in f^{n}(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\}| = \infty.$$

Mittels Kontraposition ist ein Teil der oben vermuteten Äquivalenz bewiesen. Dieses Ergebnis beinhaltet das folgende Lemma.

3.5. Lemma: *Wenn die von G erzeugte Bildsprache B_G endlich ist, dann liefern für jeden Buchstaben $x \in [f^2(\{\,\omega\,\})]$, der in einer zweiten Ableitung von ω auftritt, die ersten drei Ableitungen von x mittels der längenkonstanten Endmorphismen aus h keine andere x-Kante als $(\mathfrak{o}, x)$:*

$$|B_G| < \infty \Longrightarrow \forall x \in [f^2(\{\,\omega\,\})] : \, \|_x x = \|_x h(\{\,x\,\}) = \|_x h^2(\{\,x\,\}) = \|_x h^3(\{\,x\,\}).$$

Es gelte nun für alle Buchstaben x in einer zweiten Ableitung des Axioms:

$$\|_x x = \|_x h(\{\, x \,\}) = \|_x h^2(\{\, x \,\}) = \|_x h^3(\{\, x \,\}).$$

Zunächst wird gezeigt, daß beim Ableiten, nachdem bereits zweimal abgeleitet wurde, kein Buchstabe erstmals erzeugt wird.

3.6. Lemma: *Jeder Buchstabe in einer beliebigen Ableitung des Axioms tritt bereits in einer zweiten Ableitung auf:*

$$\forall \mathsf{w} \in \mathcal{A}^* \forall n \in \mathbb{N}_0 : [f^n(\{\, \mathsf{w} \,\})] \subseteq [f^2(\{\, \mathsf{w} \,\})].$$

Beweis: Mindestens einer der Endomorhismen aus f ist längenkonstant. Daher gilt nach Folgerung 3.1 für alle Buchstaben $x \in \mathcal{A}$

$$x \in [f(\{\, x \,\})]$$

und allgemein für ein Wort $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ und eine Ableitungsstufe $n \in \mathbb{N}_0$

$$[f^n(\{\, \mathsf{w} \,\})] \subseteq [f^{n+1}(\{\, \mathsf{w} \,\})],$$

womit bereits ein Teil der Behauptung gezeigt ist:

$$[f^n(\{\, \mathsf{w} \,\})] \subseteq [f^2(\{\, \mathsf{w} \,\})] \quad \text{für } n \leqq 2.$$

Mittels vollständiger Induktion über die Ableitungsstufe kann man zeigen, daß sich die Buchstabenmenge nicht mehr ändert, wenn sie in einem Ableitungsschritt unverändert bleibt: Wenn $[f^n(\{\, \mathsf{w} \,\})] = [f^{n+1}(\{\, \mathsf{w} \,\})]$, so gilt auch $[f^n(\{\, \mathsf{w} \,\})] = [f^{n+k}(\{\, \mathsf{w} \,\})]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies wird nun benutzt, um die Inklusion

$$[f^n(\{\, \mathsf{w} \,\})] \subseteq [f^2(\{\, \mathsf{w} \,\})]$$

für $n > 2$ zu zeigen. Es sei $x \in [\omega]$ ein Buchstabe im Axiom ω. Die folgenden Fallunterschiede sind durch die Synchronisationsbedingungen begründet.

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} [g_i(\{\, x \,\})] = \emptyset$. Alle längenkontrahierenden Endomorphismen bilden x auf das Leerwort ab:

   $$g_i(\{\, x \,\}) = \{\, \lambda \,\} \quad (i = 1, \ldots, k).$$

   Damit gilt

   $$[f(\{\, x \,\})] = \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, x \,\})].$$

   Für die Buchstabenmengen beim Ableiten mittels der längenkonstanten Endomorphismen gibt es vier Möglichkeiten.

(a) $\bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, x\,\})] = \{\, x\,\}$.
Für alle längenkonstanten Endomorphismen h_i gilt $h_i(\{\, x\,\}) = \{\, x\,\}$.
In diesem Falle gilt $f^n(\{\, x\,\}) = \{\, \lambda, x\,\}$ für alle $n \geqq 1$. Daher besteht die erzeugte Buchstabenmenge in jedem Ableitungsschritt aus dem Buchstaben x: $[f^n(\{\, x\,\})] = \{\, x\,\}$. Also gilt insbesondere

$$[f^2(\{\, x\,\})] = [f^n(\{\, x\,\})]$$

für $n > 2$.

(b) $\bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, x\,\})] = \{\, x, \bar{x}\,\}$.
In diesem Falle gilt

$$[f^2(\{\, x\,\})] = \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, x\,\})] \cup \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, \bar{x}\,\})] = \{\, x, \bar{x}\,\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, \bar{x}\,\})].$$

Es werden zwei Fälle unterschieden:

i. Durch den Buchstaben $\bar{x}$ entstehen keine neuen Buchstaben, also gilt

$$\bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, \bar{x}\,\})] \subseteq \{\, x, \bar{x}\,\}.$$

Damit gilt $[f^2(\{\, x\,\})] = [f(\{\, x\,\})]$ und für alle Ableitungsstufen $n > 2$ folgt

$$[f(\{\, x\,\})] = [f^n(\{\, x\,\})] = \{\, x, \bar{x}\,\}.$$

ii. Der Buchstabe $\bar{x}$ liefert einen neuen Buchstaben. Dann enstehen $x^{\perp}$ und $\bar{x}^{\perp}$ gleichzeitig, also gilt $\left\{\, x^{\perp}, \bar{x}^{\perp} \,\right\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, \bar{x}\,\})]$. Daraus folgt für alle Ableitungsstufen $n > 2$

$$[f^2(\{\, x\,\})] = [f^n(\{\, x\,\})] = \mathcal{A}.$$

Damit ist auch in diesem Falle die Gleichung

$$[f^2(\{\, x\,\})] = [f^n(\{\, x\,\})]$$

für $n > 2$ erfüllt.

(c) $\bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, x\,\})] = \left\{\, x, x^{\perp}, \bar{x}^{\perp} \,\right\}$.
In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned}
[f^2(\{\, x\,\})] &= \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, x\,\})] \cup \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, x^{\perp}\,\})] \cup \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{\, \bar{x}^{\perp}\,\})] \\
&= \left\{\, x, x^{\perp}, \bar{x}^{\perp} \,\right\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} ([h_i(\{\, x^{\perp}\,\})] \cup [h_i(\{\, \bar{x}^{\perp}\,\})]).
\end{aligned}$$

Es werden wieder zwei Fälle unterschieden:

i. Aus $x^\perp$ und $\bar{x}^\perp$ entsteht kein neuer Buchstabe. Dann gilt

$$[f^2(\{x\})] = [f(\{x\})]$$

und für alle Ableitungsstufen $n > 2$ folgt

$$[f(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \left\{ x, x^\perp, \bar{x}^\perp \right\}.$$

ii. Aus $x^\perp$ und $\bar{x}^\perp$ entsteht ein neuer Buchstabe. Dies kann nur $\bar{x}$ sein. Folglich gilt für alle Ableitungsstufen $n > 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

Auch hier gilt für $n > 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})].$$

(d) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} [h_i(\{x\})] = \mathcal{A}$.
Dann gilt auch für alle weiteren Ableitungen

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

2. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} [g_i(\{x\})] = \left\{ x^\perp, \bar{x}^\perp \right\}$. Damit gilt

$$[f(\{x\})] = \bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{x\})] \cup \left\{ x^\perp, \bar{x}^\perp \right\}.$$

Für die Buchstabenmengen beim Ableiten mittels der längenkonstanten Endomorphismen gibt es vier Möglichkeiten.

(a) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} [h_i(\{x\})] = \{x\}$. Dann ist $[f(\{x\})] = \left\{ x, x^\perp, \bar{x}^\perp \right\}$.
Folglich gilt

$$\begin{aligned}[f^2(\{x\})] &= [f(\{x\})] \cup [f(\left\{ x^\perp \right\})] \cup [f(\left\{ \bar{x}^\perp \right\})] \\ &= \left\{ x, x^\perp, \bar{x}^\perp \right\} \cup [f(\left\{ x^\perp \right\})] \cup [f(\left\{ \bar{x}^\perp \right\})].\end{aligned}$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

i. Es entsteht kein $\bar{x}$: $\bar{x} \notin [f^2(\{x\})]$. Dann gilt $[f(\{x\})] = [f^2(\{x\})]$ und damit auch

$$[f(\{x\})] = [f^n(\{x\})]$$

für alle weiteren Ableitungsstufen.

ii. Es entsteht ein $\overline{x}$. Dann ist $[f^2(\{x\})] = \mathcal{A}$, und es gilt für alle weiteren Ableitungen

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

Somit gilt in diesem Falle ebenfalls für $n > 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})].$$

(b) $\bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{x\})] = \{x, \overline{x}\}$. Damit ist $[f(\{x\})] = \mathcal{A}$, und es gilt für $n > 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

(c) $\bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{x\})] = \left\{x, x^\perp, \overline{x}^\perp\right\}$. Damit ist $[f(\{x\})] = \left\{x, x^\perp, \overline{x}^\perp\right\}$ und es gibt zwei Fälle:

i. Es entsteht kein $\overline{x}$: $\overline{x} \notin [f^2(\{x\})]$. Dann gilt $[f^2(\{x\})] = [f(\{x\})]$ und für alle weiteren Ableitungen

$$[f^n(\{x\})] = [f(\{x\})].$$

ii. Es entsteht ein $\overline{x}$: $\overline{x} \in [f^2(\{x\})]$. Dann gilt $[f^2(\{x\})] = \mathcal{A}$ und für alle weiteren Ableitungen

$$[f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

In beiden Fällen erhält man für $n > 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})].$$

(d) $\bigcup_{i=1}^{m} [h_i(\{x\})] = \mathcal{A}$. In diesem Falle gilt $[f(\{x\})] = \mathcal{A}$ und somit ist auch

$$[f^n(\{x\})] = \mathcal{A}$$

für alle $n > 2$.

In jedem Falle stimmt für jede Ableitungsstufe $n > 2$ die Buchstabenmenge $[f^n(\{x\})]$ mit $[f^2(\{x\})]$ überein. Für eine Ableitungsstufe $n > 2$ und ein beliebiges Wort $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_l$ gilt dann

$$\begin{aligned}
[f^n(\{\mathsf{w}\})] &= [f^n(\{w_1\}) \cdots f^n(\{w_l\})] \\
&= [f^n(\{w_1\})] \cup \cdots \cup [f^n(\{w_l\})] \\
&= [f^2(\{w_1\})] \cup \cdots \cup [f^2(\{w_l\})] \\
&= [f^2(\{w_1\}) \cdots f^2(\{w_l\})] \\
&= [f^2(\{\mathsf{w}\})].
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß jeder überhaupt auftretende Buchstabe bereits in einer zweiten Ableitung vorkommt. Dies besagt gerade die Behauptung. ✾

Damit gilt die Bedingung

$$\|_x x = \|_x h(\{\, x \,\}) = \|_x h^2(\{\, x \,\}) = \|_x h^3(\{\, x \,\})$$

für alle Buchstaben x, die durch Ableiten des Axioms entstehen und nicht nur für jene, die bei zweimaligem Ableiten entstehen.
Als nächstes wird gezeigt, wie sich die Kantenmenge auf einer Ableitungsstufe mittels der Kanten vorigerer Ableitungen darstellen läßt.

3.7. Folgerung: *Für die Kantenmenge $\|h^n(\{\, \mathsf{w} \,\})$ zu den n-ten Ableitungen eines Wortes $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ gilt*

$$\|h^n(\{\, \mathsf{w} \,\}) = \bigcup_{(\mathsf{q},x)\in\|\mathsf{w}} \|^{\mathsf{q}} h^n(\{\, x \,\}).$$

Beweis: Es sei $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^l$. Die Kantenmenge setzt sich wie folgt zusammen:

$$\|\mathsf{w} = \|w_1 \cup \|^{\overrightarrow{w_1}(\mathsf{o})} w_2 \cup \cdots \cup \|^{\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathsf{o})} w_l.$$

Für die Kantenmengen der Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\|h^n(\{\, \mathsf{w} \,\}) &= \|h^n(\{\, w_1 \cdots w_l \,\}) \\
&= \|h^n(\{\, w_1 \,\}) h^n(\{\, w_2 \,\}) \cdots h^n(\{\, w_l \,\}) \\
&= \|h^n(\{\, w_1 \,\}) \cup \|^{\overrightarrow{w_1}(\mathsf{o})} h^n(\{\, w_2 \,\}) \cup \cdots \cup \|^{\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathsf{o})} h^n(\{\, w_l \,\}) \quad \text{(Folg. 3.1)} \\
&= \bigcup_{(\mathsf{q},x)\in\|\mathsf{w}} \|^{\mathsf{q}} h^n(\{\, x \,\}),
\end{aligned}$$

was die Behauptung besagt. ♣

Es sei $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ ein beliebiges Wort. Folgerung 3.7 gilt insbesondere für jedes Wort einer Ableitungsstufe $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 \; \forall \mathsf{y} \in h^j(\{\, \mathsf{w} \,\}) \; \forall i \in \mathbb{N} : \; \|h^i(\{\, \mathsf{y} \,\}) = \bigcup_{(\mathsf{q},x)\in\|\mathsf{y}} \|^{\mathsf{q}} h^i(\{\, x \,\}).$$

Daraus folgt

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 \; \forall i \in \mathbb{N} : \bigcup_{\mathsf{y}\in h^j(\{\, \mathsf{w} \,\})} \|h^i(\{\, \mathsf{y} \,\}) = \bigcup_{\mathsf{y}\in h^j(\{\, \mathsf{w} \,\})} \left(\bigcup_{(\mathsf{q},x)\in\|\mathsf{y}} \|^{\mathsf{q}} h^i(\{\, x \,\}) \right).$$

Zum einen gilt für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{\mathsf{y}\in h^j(\{\, \mathsf{w} \,\})} \left(\bigcup_{(\mathsf{q},x)\in\|\mathsf{y}} \|^{\mathsf{q}} h^i(\{\, x \,\}) \right) = \bigcup_{(\mathsf{q},x) \in \bigcup_{\mathsf{y}\in h^j(\{\, \mathsf{w} \,\})} \|\mathsf{y}} \|^{\mathsf{q}} h^i(\{\, x \,\}),$$

zum anderen besagt die Definition von Kantenmengen zu Wortmengen

$$\|h^i(\{\,\mathsf{y}\,\}) = \bigcup_{\mathsf{v}\in h^i(\{\,\mathsf{y}\,\})} \|\mathsf{v} \quad \text{bzw.} \quad \|h^j(\{\,\mathsf{w}\,\}) = \bigcup_{\mathsf{y}\in h^j(\{\,\mathsf{w}\,\})} \|\mathsf{y}.$$

Zusammen führt dies zu folgender Aussage:

$$\forall j \in \mathbb{N}_0\ \forall i \in \mathbb{N}:\ \bigcup_{\mathsf{y}\in h^j(\{\,\mathsf{w}\,\})} \left(\bigcup_{\mathsf{v}\in h^i(\{\,\mathsf{y}\,\})} \|\mathsf{v} \right) = \bigcup_{(\mathfrak{q},x)\,\in\, \bigcup\limits_{\mathsf{y}\in h^j(\{\,\mathsf{w}\,\})} \|\mathsf{y}} \|^{\mathfrak{q}} h^i(\{\,x\,\}),$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\forall j \in \mathbb{N}_0\ \forall i \in \mathbb{N}:\ \bigcup_{\mathsf{v}\in h^{i+j}(\{\,\mathsf{w}\,\})} \|\mathsf{v} \quad = \bigcup_{(\mathfrak{q},x)\in\|h^j(\{\,\mathsf{w}\,\})} \|^{\mathfrak{q}} h^i(\{\,x\,\}).$$

Daraus folgt

$$\forall j \in \mathbb{N}_0\ \forall i \in \mathbb{N}:\ \|h^{i+j}(\{\,\mathsf{w}\,\}) = \bigcup_{(\mathfrak{q},x)\in\|h^j(\{\,\mathsf{w}\,\})} \|^{\mathfrak{q}} h^i(\{\,x\,\}).$$

Damit wird die Aussage aus Folgerung 3.7 folgendermaßen verallgemeinert.

3.8. Folgerung: *Für die Kantenmenge $\|h^n(\{\,\mathsf{w}\,\})$ zu den n-ten Ableitungen eines Wortes $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^*$ gilt*

$$\|h^n(\{\,\mathsf{w}\,\}) = \bigcup_{(\mathfrak{q},x)\in\|h^{n-i}(\{\,\mathsf{w}\,\})} \|^{\mathfrak{q}} h^i(\{\,x\,\}) \quad \textit{für}\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Anschaulich gesprochen besagt dies: Die Kantenmenge K_n auf einer Ableitungsstufe n erhält man aus der Kantenmenge K_j einer niedrigeren Stufe $j < n$, in dem jede in K_j auftretende Kante durch alle ihre $(n-j)$-ten Ableitungen ersetzt wird.
Mit der Beziehung

$$\|h^{n+1}(\{\,\mathsf{w}\,\}) = \bigcup_{(\mathfrak{q},x)\in\|h^n(\{\,\mathsf{w}\,\})} \|^{\mathfrak{q}} h(\{\,x\,\})$$

und der Voraussetzung $\|_x x = \|_x h(\{\,x\,\})$ schließt man aus Folgerung 3.8: Wenn eine Kante $(\mathfrak{q}, x)$ in der Kantenmenge zu den n-ten Ableitungen ($n \in \mathbb{N}_0$) eines Wortes w auftritt, dann gehört sie auch zu den Kantenmengen höherer Ableitungen:

$$\|\mathsf{w} \subseteq \|h(\{\,\mathsf{w}\,\}) \subseteq \|h^2(\{\,\mathsf{w}\,\}) \subseteq \cdots \subseteq \|h^n(\{\,\mathsf{w}\,\}) \subseteq \cdots.$$

Zu jedem Wort $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^l$, das keine anderen Buchstaben enthält, als in den zweiten Ableitungen von ω auftreten, sei $M_i(\mathsf{w})$ die Menge der Kanten, die in der Kantenmenge einer

i-ten Ableitung von w mittels der längenkonstanten Endomorphismen höchstens auftreten. Für $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_l$ gilt analog zu Kantenmengen

$$M_i(\mathsf{w}) = M_i(w_1) \cup M_i^{\overrightarrow{w_1}(\mathfrak{o})}(w_2) \cup \cdots \cup M_i^{\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathfrak{o})}(w_l),$$

wobei $M_i^{\mathfrak{a}}(x)$ aus $M_i(x)$ durch Verschieben der Kanten um $\mathfrak{a}$ entsteht. Für $i = 0$ und einen Buchstaben x gilt $M_i(x) = M_0(x) = \| x = \{ (\mathfrak{o}, x) \}$. Aus der Synchronisationsbedingung

$$\boxdot x' \subseteq \mu[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\overline{x}^\perp}] \Cup [\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x]$$

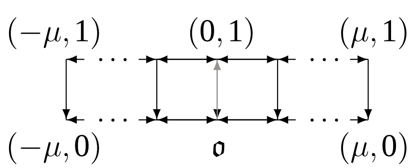
für eine Ableitung x' von x mittels eines $(1,\mu)$-Endomorphismus aus h folgt für die Knotenmenge $\odot x'$

$$\odot x' \subseteq \left\{ \alpha\mathfrak{v}_{x^\perp}, \alpha\mathfrak{v}_{x^\perp} + \mathfrak{v}_x \mid \alpha \in \mathbb{Z} \text{ und } -\mu \leqq \alpha \leqq \mu \right\}.$$

Da aus x keine andere x-Kante entsteht, gilt für $M_1(x)$

$$\begin{aligned} M_1(x) = &\left\{ \begin{array}{l} (\alpha\mathfrak{v}_{x^\perp}, x^\perp), (\alpha\mathfrak{v}_{x^\perp} + \mathfrak{v}_x, x^\perp), \\ (\alpha\mathfrak{v}_{\overline{x}^\perp}, \overline{x}^\perp), (\alpha\mathfrak{v}_{\overline{x}^\perp} + \mathfrak{v}_x, \overline{x}^\perp) \end{array} \middle| \ \alpha \in \mathbb{Z} \text{ und } -\mu \leqq \alpha \leqq \mu - 1 \right\} \\ &\cup \left\{ (\alpha\mathfrak{v}_{x^\perp} + \mathfrak{v}_x, \overline{x}) \mid \alpha \in \mathbb{Z} \text{ und } -\mu \leqq \alpha \leqq \mu \right\}. \end{aligned}$$

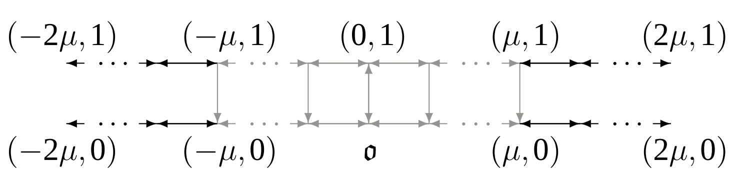
Dies sei für $x = u$ veranschaulicht:



Die Kanten aus $M_1(x)$ liefern beim Ableiten keine neue x-Kante. Auch liefern sie keine neue $\overline{x}$-Kante, da diese mit einer neuen x-Kante einhergehen würde. Somit können beim Ableiten höchstens neue $x^\perp$- und $\overline{x}^\perp$-Kanten entstehen – und zwar ausschließlich aus $\overline{x}$-Kanten von $M_1(x)$. Damit gilt für die Menge $M_2(x)$

$$\begin{aligned} M_2(x) = &\left\{ \begin{array}{l} (\alpha\mathfrak{v}_{x^\perp}, x^\perp), (\alpha\mathfrak{v}_{x^\perp} + \mathfrak{v}_x, x^\perp), \\ (\alpha\mathfrak{v}_{\overline{x}^\perp}, \overline{x}^\perp), (\alpha\mathfrak{v}_{\overline{x}^\perp} + \mathfrak{v}_x, \overline{x}^\perp) \end{array} \middle| \ \alpha \in \mathbb{Z} \text{ und } -2\mu \leqq \alpha \leqq 2\mu - 1 \right\} \\ &\cup \left\{ (\alpha\mathfrak{v}_{x^\perp} + \mathfrak{v}_x, \overline{x}) \mid \alpha \in \mathbb{Z} \text{ und } -\mu \leqq \alpha \leqq \mu \right\}. \end{aligned}$$

Für $x = u$ ergibt sich folgende Darstellung:



Wenn in $M_3(x)$ eine Kante existiert, die nicht in $M_2(x)$ vorkommt, so stammt sie von einer Kante aus $M_2(x)$, die nicht in $M_1(x)$ liegt. Da die $x^\perp$- und $\overline{x}^\perp$-Kanten, die in $M_2(x)$

erstmalig auftreten, aus $\bar{x}$-Kanten und diese wiederum aus der x-Kante hervorgehen, erzeugen sie ihrerseits weder neue $\bar{x}$- noch neue x-Kanten. Somit liefern sie auch keine neuen $x^{\perp}$- oder $\bar{x}^{\perp}$-Kanten. Folglich stimmt $M_3(x)$ mit $M_2(x)$ überein. Da in $M_3(x)$ keine Kanten auftreten, die in $M_2(x)$ nicht vorkommen, entsteht auch später keine neue Kante: Für alle Ableitungsstufen $n \geqq 2$ stimmt $M_n(x)$ mit $M_2(x)$ überein. Da $M_0(x)$ und $M_1(x)$ in $M_2(x)$ eingeschlossen sind, gilt für alle Ableitungsstufen $n \in \mathbb{N}_0$:

$$M_n(x) \subseteq M_2(x).$$

Jede Menge $M_n(x)$ besteht aus den Kanten, die bei n-maligem Ableiten von x höchstens entstehen. Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\|h^n(\{\, x \,\}) \subseteq M_n(x),$$

woraus mit der vorigen Inklusion

$$\|h^n(\{\, x \,\}) \subseteq M_2(x)$$

folgt. Allgemein gilt für ein Wort $\mathsf{w} \in \mathcal{A}^l$, das keine anderen Buchstaben enthält als die zweiten Ableitungen von ω, und alle Ableitungsstufen $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \|h^n(\{\, \mathsf{w} \,\}) =& \|h^n(\{\, w_1 \,\}) \cup \|^{\overrightarrow{w_1}(\mathsf{o})} h^n(\{\, w_2 \,\}) \cup \cdots \cup \|^{\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathsf{o})} h^n(\{\, w_l \,\}) \\ &\subseteq M_2(w_1) \cup M_2^{\overrightarrow{w_1}(\mathsf{o})}(w_2) \cup \cdots \cup M_2^{\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathsf{o})}(w_l), \\ &= M_2(\mathsf{w}). \end{aligned}$$

Da die Menge $M_2(\mathsf{w})$ für jedes Wort w endlich ist, gibt es nur endlich viele Teilmengen. Daraus folgt, daß für ein beliebiges Wort w nur endlich viele der Mengen $\|h^n(\{\, \mathsf{w} \,\})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ verschieden sind:

$$\forall \mathsf{w} : \ |\{\, \|h^n(\{\, \mathsf{w} \,\}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \,\}| < \infty.$$

Es seien im folgenden drei Mengensysteme von Kantenmengen definiert, die sich auf das Axiom ω beziehen. Sie werden Kantensysteme genannt und mit K_h, K_γ und K_g bezeichnet. Dabei bestehe K_h aus jenen Kantenmengen, die durch Zusammenlegen aller Kantenmengen von Ableitungen einer Stufe mittels längenkonstanter Endomorphismen entstehen:

$$K_h = \{\, \|h^n(\{\, \omega \,\}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \,\}.$$

Das Kantensystem K_γ bestehe aus jenen Kantenmengen, die durch Zusammenlegen aller Kantenmengen von Ableitungen einer Stufe entstehen, wobei der zuletzt angewendete Endomorphismus ein längenkontrahierender ist:

$$K_\gamma = \{\, \|(f^m \circ g)(\{\, \omega \,\}) \mid m \in \mathbb{N}_0 \,\}.$$

Die Kantenmengen, die durch Zusammenlegen aller Kantenmengen von Ableitungen einer Stufe entstehen, bei denen mindestens einmal ein längenkontrahierender Endomorphismus angewendet wird, seien in der Menge K_g zusammengefaßt:

$$K_g = \{\, \|(f^m \circ g \circ h^n)(\{\,\omega\,\}) \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \,\}.$$

Das Kantensystem K_h ist ein Mengensystem von Teilmengen der Menge $M_2(\omega)$. Da $M_2(\omega)$ endlich ist, ist es auch K_h:

$$|K_h| < \infty.$$

Jede Kantenmenge $\|(f^m \circ g)(\{\,\omega\,\})$ aus K_γ läßt sich darstellen als $\|g(f^m(\{\,\omega\,\}))$, was gleichbedeutend ist mit

$$\bigcup_{i=1}^{k} \|g_i(f^m(\{\,\omega\,\}))$$

und dies wiederum mit

$$\bigcup_{\mathsf{w} \in f^m(\{\,\omega\,\})} \left(\bigcup_{i=1}^{k} \|g_i(\{\,\mathsf{w}\,\}) \right).$$

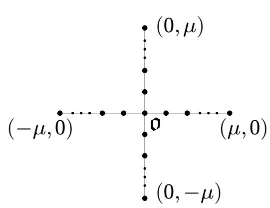
Aus der Definition von längenkontrahierenden Endomorphismen folgt für $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_l$ und $i = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} \|g_i(\{\,\mathsf{w}\,\}) &= \|g_i(\{\,w_1\,\}) \cup \|g_i(\{\,w_2\,\}) \cup \cdots \cup \|g_i(\{\,w_l\,\}) \\ &= \bigcup_{x \in [\mathsf{w}]} \|g_i(\{\,x\,\}). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich mit Lemma 3.6

$$\|(f^m \circ g)(\{\,\omega\,\}) = \bigcup_{i=1}^{k} \left(\bigcup_{x \in [f^m(\{\,\omega\,\})]} \|g_i(\{\,x\,\}) \right) = \bigcup_{x \in [f^2(\{\,\omega\,\})]} \|g(\{\,x\,\}).$$

Folglich liegen alle Kanten auf folgendem Kreuz:



.

Da es nur endlich viele „Teilkreuze“ gibt, ist das Kantensystem K_γ endlich:

$$|K_\gamma| < \infty.$$

Jede Kantenmenge $\|(f^m \circ g \circ h^n)(\{\,\omega\,\})$ läßt sich darstellen als $\|h^n((f^m \circ g)(\{\,\omega\,\}))$ oder

$$\bigcup_{\mathsf{w}\in(f^m\circ g)(\{\,\omega\,\})} \|h^n(\{\,\mathsf{w}\,\}).$$

Es seien u, v zwei Wörter mit übereinstimmenden Kantenmengen. Nach Folgerung 3.8 ergibt sich für die Kantenmengen der n-ten Ableitungen

$$\begin{aligned}
\|h^n(\{\,\mathsf{v}\,\}) &= \bigcup_{(\mathsf{q},x)\in\|\mathsf{v}} \|^{\mathsf{q}}h^n(\{\,x\,\}) \\
&= \bigcup_{(\mathsf{q},x)\in\|\mathsf{u}} \|^{\mathsf{q}}h^n(\{\,x\,\}) \\
&= \|h^n(\{\,\mathsf{u}\,\}).
\end{aligned}$$

Haben zwei Wörter übereinstimmende Kantenmengen, so stimmen auch die Kantenmengen der Ableitungen überein. Folglich gilt

$$\|(f^m \circ g \circ h^n)(\{\,w\,\}) = \bigcup_{\|\mathsf{v}\in K_\gamma} \|h^n(\{\,\mathsf{v}\,\}) \subseteq \bigcup_{\|\mathsf{v}\in K_\gamma} M_2(\mathsf{v}).$$

Da $M_2(\mathsf{v})$ für alle Wörter v, deren Kantenmenge zu K_γ gehört, und K_γ endlich sind, ist auch die Vereinigung

$$V = \bigcup_{\|\mathsf{v}\in K_\gamma} M_2(\mathsf{v})$$

endlich. Jedes Element von K_g ist eine Teilmenge von V. Da die Menge V endlich ist, gibt es höchstens endlich viele Teilmengen davon; also enthält K_g höchstens endlich viele Elemente.

Für jede Ableitungsstufe $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\|h^n(\{\,\omega\,\}) = \bigcup_{\mathsf{w}\in h^n(\{\,\omega\,\})} \|\mathsf{w}$$

und $h^n(\{\,\omega\,\})$ ist endlich. Damit folgt aus der Endlichkeit von K_h die Endlichkeit der Menge

$$K'_h = \{\, \|\mathsf{w} \mid \mathsf{w} \in h^n(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\}.$$

Ebenso gilt für $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$\|(f^m \circ g \circ h^n)(\{\,\omega\,\}) = \bigcup_{\mathsf{w}\in(f^m\circ g\circ h^n)(\{\,\omega\,\})} \|\mathsf{w}$$

und $(f^m \circ g \circ h^n)(\{\,\omega\,\})$ ist endlich. Aus der Endlichkeit von K_g folgt damit die Endlichkeit der Menge

$$K'_g = \{\, \|\mathsf{w} \mid \mathsf{w} \in (f^m \circ g \circ h^n)(\{\,\omega\,\}), m, n \in \mathbb{N}_0 \,\}.$$

Das Mengensystem K_G aller Kantenmengen zu Wörtern, die durch G erzeugt werden, setzt sich aus K'_h und K'_g zusammen:

$$\begin{aligned} K_G &= \{\, \|\mathsf{w} \mid \mathsf{w} \in f^n(\{\,\omega\,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\} \\ &= K'_h \cup K'_g. \end{aligned}$$

Folglich ist K_G endlich. Damit ist auch die Bildmenge B_G endlich, womit das folgende Lemma bewiesen ist.

3.9. Lemma: *Wenn für jeden Buchstaben $x \in [f^2(\{\,\omega\,\})]$, der in einer zweiten Ableitung von ω auftritt, die ersten drei Ableitungen von x mittels der längenkonstanten Endmorphismen aus h keine andere x-Kante als $(\mathfrak{o}, x)$ liefern, dann ist die von G erzeugte Bildsprache B_G endlich:*

$$\forall x \in [f^2(\{\,\omega\,\})] : \; \|_x x = \|_x h(\{\,x\,\}) = \|_x h^2(\{\,x\,\}) = \|_x h^3(\{\,x\,\}) \Longrightarrow |B_G| < \infty.$$

Dieses Lemma stellt den zweiten Teil der eingangs vermuteten Äquivalenz dar, so daß mit Lemma 3.5 die Vermutung bestätigt ist. Der folgende Satz faßt dieses Ergebnis zusammen.

3.10. Satz: *Die von G erzeugte Bildsprache B_G ist genau dann endlich, wenn für jeden Buchstaben $x \in [f^2(\{\,\omega\,\})]$, der in einer zweiten Ableitung von ω auftritt, die ersten drei Ableitungen von x mittels der längenkonstanten Endmorphismen aus h keine andere x-Kante als $(\mathfrak{o}, x)$ liefern:*

$$|B_G| < \infty \Longleftrightarrow \forall x \in [f^2(\{\,\omega\,\})] : \; \|_x x = \|_x h(\{\,x\,\}) = \|_x h^2(\{\,x\,\}) = \|_x h^3(\{\,x\,\}).$$

Damit ist gezeigt, wie man zu einem längenkonstanten *sT0L*-System entscheiden kann, ob es eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.

4. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, tabellierte Ketten-Code-Bild-Systeme über dem Alphabet $\{\,r, u, l, d\,\}$ hinsichtlich der Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprachen untersucht.
Die Untersuchungen beruhen auf einer Abstrahierungshierarchie aus [T02]. Es wird nachgewiesen, daß es entscheidbar ist, ob ein synchrones, tabelliertes Ketten-Code-Bild-System eine endliche oder unendliche Bildsprache erzeugt.
Solche Ketten-Code-Bild-Systeme werden in längenkontrahierende, -konstante und -expandierende Systeme eingeteilt. Längenkontrahierende Ketten-Code-Bild-Systeme erzeugen eine endliche, längenexpandierende eine unendliche Bildsprache. Bei längenkonstanten Ketten-Code-Bild-Systemen gibt es sowohl Systeme, die eine endliche Bildsprache liefern, als auch solche, die eine unendliche Bildsprache erzeugen. Mittels einer notwendigen und hinreichenden Bedingung kann nach dreimaligem Ableiten des Startwortes die Endlichkeit bzw. Unendlichkeit entschieden werden.

Literatur

[DH89] DASSOW, J.; HINZ, F.: *Kettencode-Bildsprachen. Theorie und Anwendungen*. Wiss. Zeitschrift der Techn. Univ. Magdeburg, 1989.

[DHr92] DASSOW, J.; HROMKOVIČ, J.: *On Synchronized Lindenmayer Picture Languages*. Lindenmayer Systems, 253–261. Springer-Verlag, Berlin 1992.

[Fe68] FEDER, J.: *Languages of encoded line patterns*. Inform. Control, 13:230–244.

[Fr61] FREEMAN, H.: *On the encoding of arbitrary geometric configurations*. IRE Trans. EC, 10:260–168, 1961.

[MRW82] MAURER, H.; ROZENBERG, G.; WELZL, E.: *Using string languages to describe picture languages*. Inform. Control, 54:155–185, 1982.

[RS80] ROZENBERG, G.; SALOMAA, A.: *The Mathematical Theory of L Systems*. Academic Press, 1980.

[SW85] SUDBOROUGH, I. H.; WELZL, E.: *Complexity and decidability for chain code picture languages*. Theoretical Computer Science, 36:173–202, 1985.

[T02] TRUTHE, B.: *Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Informatik, Preprint Nr. 8/2002.

[T03a] TRUTHE, B.: *On the Finiteness of Picture Languages of synchronous, simple nondeterministic Chain Code Picture Systems*. Fundamenta Informaticae, 56:389–409, 2003.

[T03b] TRUTHE, B.: *Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, deterministisch-tabellierter Ketten-Code-Bild-Systeme*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Informatik, Preprint Nr. 15/2003.